

# ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTLEITUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND XI, HEFT 4 (SCHLUSSHEFT)

MIT 31 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 31. DEZEMBER 1957)



WIEN  
SPRINGER-VERLAG  
1957



Das

## Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)  
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5  
Tel. 63 76 71, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind: der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Der Verlag.

### Band XI, Heft 4

### Inhaltsverzeichnis

#### Originalarbeiten

	Seite
E. Egerváry. Über eine Verallgemeinerung der Purcell'schen Methode zur Auflösung linearer Gleichungssysteme .....	249
K. Federhofer. Die dünne Kreisringplatte mit großer Ausbiegung .....	252
H. Jung. Über die Bestimmung der Wärmespannungen in ungleichförmig erwärmten Kontaktköfen. (Mit 6 Textabbildungen) .....	257
G.-Ac. Oravas. Transverse Bending of Thin Shallow Shells of Translation. (With 4 Figures)	264
W. Peschka. Über Stabilitätsuntersuchungen mit Hilfe des Verfahrens der „harmonischen Balance“. (Mit 6 Textabbildungen) .....	276
H. Hofmann. Über das Drehmoment im elektromagnetischen Feld. Erster Teil: Elektrostatisches Feld. (Mit 6 Textabbildungen) .....	285
K. Karas. Stationäre Laminarströmung durch Kreis- und Kreisringrohre mit fester bzw. beweglicher Innenwandung und bei statischer Druckverteilung. (Mit 5 Textabbildungen)	306
J. Braunbeck. Über Körperfarben im Röntgengebiet .....	318
K. Prachar. Zur Theorie der Gleichrichtung. (Mit 4 Textabbildungen) .....	320
K. Oswatitsch. Über eine Verallgemeinerung des Potentials auf Strömungen mit Drehung. (Berichtigung) .....	326
A. Basch. Franz Jung † .....	327

#### Buchbesprechungen

Dorfner, K.-R., Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik (R. Bruniak). — Flüge, W., Statik und Dynamik der Schalen. 2. Auflage (H. Parkus). — Guderley, K. G., Theorie schallnaher Strömungen (H. Parkus). — Herberg, W., Spannbetonbau. II. Teil (F. Pongratz). — Hübner, E., Technische Schwingungslehre in ihren Grundzügen (G. Heinrich). — Hutchinson, F. W., Thermodynamics of Heat-Power Systems (R. Bruniak). — Koch, K. M., Einführung in die Physik der magnetischen Werkstoffe (L. Kneissler). — Pippard, A. J. S., und J. F. Baker, The Analysis of Engineering Structures. 3. Auflage (E. Czitary). — Regler, F., Atomphysik (C. Kämmerer). — Reidemeister, K., Raum und Zahl (W. Wunderlich). — Rittinghaus, K.-F., Zusammenstellung eines Meßwagens für Bau- und Raumakustik (F. Plöckinger).	328
--	-----



# Über eine Verallgemeinerung der Purcellschen Methode zur Auflösung linearer Gleichungssysteme

Von E. Egerváry, Budapest

**Zusammenfassung.** Es wird gezeigt, wie eine vom Verfasser eingeführte „rangvermindernde Operation“ bei Matrizen unter anderem zur Auflösung homogener linearer Gleichungssysteme verwendet werden kann. Das dargelegte finite Iterationsverfahren enthält als Spezialfall die bekannte vektorielle Methode von E. W. Purcell.

E. W. Purcell hat kürzlich ein Iterationsverfahren zur Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen mitgeteilt<sup>1</sup>, das nach endlich vielen Schritten zum Ziel führt und die folgende geometrische Deutung gestattet<sup>2</sup>: Sei

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

das aufzulösende homogenisierte Gleichungssystem. Betrachtet man  $n$  zu einer Spaltenmatrix  $\mathfrak{x}$  zusammengefaßte Größen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  als homogene Koordinaten eines Punktes in einem  $(n-1)$ -dimensionalen Raum und wird die Transposition durch einen Stern angezeigt, so kann die  $i$ -te Systemgleichung durch  $a_i^* \mathfrak{x} = 0$  wiedergegeben und als Bedingung dafür angesehen werden, daß der Punkt  $\mathfrak{x}$  in der Hyperebene  $a_i$  liegt. Man nimmt nun den Ausgang von den  $n$  Punkten

$$\mathfrak{x}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathfrak{x}_n^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus  $\mathfrak{x}_1^0$  als Zentrum werden die übrigen Punkte zunächst auf  $a_1$  projiziert, womit man  $n-1$  Punkte  $\mathfrak{x}_2^1, \mathfrak{x}_3^1, \dots, \mathfrak{x}_n^1$  erhält. Von diesen werden aus  $\mathfrak{x}_2^1$  die übrigen auf  $a_2$  projiziert, womit man  $n-2$  Punkte  $\mathfrak{x}_3^2, \mathfrak{x}_4^2, \dots, \mathfrak{x}_n^2$  in  $a_1$  und  $a_2$  erhält. Auf diese Weise fortfahrend, gelangt man schließlich zu einem Punkt  $\mathfrak{x}_n^{n-1}$  in  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , der eine Lösung des Gleichungssystems darstellt.

Jede Projektion verlangt gemäß

$$\mathfrak{x}_{k+h}^k = \mathfrak{x}_{k+h}^{k-1} - \frac{a_k^* \mathfrak{x}_{k+h}^{k-1}}{a_k^* \mathfrak{x}_k^{k-1}} \mathfrak{x}_k^{k-1}, \quad \begin{matrix} h = 1, 2, \dots, n-k, \\ k = 1, 2, \dots, n-1, \end{matrix} \quad (1)$$

lediglich die Berechnung von Skalarprodukten.

<sup>1</sup> E. W. Purcell: The vector method of solving simultaneous linear equations. J. Math. Physics **32**, 180—183 (1953).

<sup>2</sup> Wir folgen der Interpretation, die G. E. Forsythe in Math. Reviews **15**, 471 (1954) gegeben hat.

Allerdings läßt sich gegen diese Methode ebenso wie gegen die Triangulärfaktorisierung von Banachiewicz ein Einwand erheben: Beide Methoden versagen, wenn irgendeiner der linken oberen Hauptminoren der Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{A}$  verschwindet.

Es ist der Zweck der vorliegenden kurzen Note, ein allgemeines Verfahren darzulegen, welches in der Wiederholung einer rangvermindernden Operation besteht<sup>3</sup>, ohne Ausnahme für jedes homogene System anwendbar ist und die Purcellsche Methode als Sonderfall einschließt.

Setzen wir vorläufig voraus, daß die gegebenen Gleichungen

$$a_i^* x \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r < n \quad (2)$$

linear unabhängig sind. Der erste Schritt unseres Iterationsprozesses besteht in der Berechnung von  $n - 1$  linear unabhängigen Vektoren, welche die erste Gleichung  $a_1^* x = 0$  befriedigen. Zu diesem Zwecke wenden wir auf die Einheitsmatrix  $n$ -ter Ordnung  $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  die folgende rangvermindernde Operation aus:

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{E} - \frac{e_{v_1} a_1^*}{a_1^* e_{v_1}};$$

hierbei ist  $a_1^* e_{v_1}$  irgendein nichtverschwindendes Element von  $a_1^*$ .  $\mathfrak{X}_1$  hat den Rang  $n - 1$  und genügt der Beziehung  $a_1^* \mathfrak{X}_1 = 0$ , wie man sofort sieht. Ferner gilt  $\mathfrak{X}_1 e_{v_1} = 0$ , demnach verschwindet die  $v_1$ -te Spalte von  $\mathfrak{X}_1$  und die verbleibenden Spalten sind linear unabhängige Lösungsvektoren der ersten Gl. (2).

Der allgemeine Iterationsschritt lautet:

$$\mathfrak{X}_k = \mathfrak{X}_{k-1} - \frac{\mathfrak{X}_{k-1} e_{v_k} a_k^* \mathfrak{X}_{k-1}}{a_k^* \mathfrak{X}_{k-1} e_{v_k}}. \quad (3)$$

Die lineare Unabhängigkeit der Vektoren  $a_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) zieht  $a_k^* \mathfrak{X}_{k-1} \neq 0$  nach sich und  $a_k^* \mathfrak{X}_{k-1} e_{v_k}$  bezeichnet irgendein nichtverschwindendes Element von  $a_k^* \mathfrak{X}_{k-1}$  (das stets existiert).  $\mathfrak{X}_k$  hat den Rang  $n - k$  und befriedigt die ersten  $k$  Gleichungen  $a_1^* \mathfrak{X}_k = 0, \dots, a_k^* \mathfrak{X}_k = 0$ . Ferner gelten die Gleichungen  $\mathfrak{X}_k e_{v_1} = 0, \dots, \mathfrak{X}_k e_{v_k} = 0$ , so daß die  $v_1$ -te,  $v_2$ -te,  $\dots$   $v_k$ -te Spalte von  $\mathfrak{X}_k$  verschwinden, während die restlichen Spalten linear unabhängige Lösungsvektoren der ersten  $k$  Gln. (2) darstellen.

In dieser Weise fortfahrend, gelangt man mit dem  $r$ -ten Schritt zu einer Matrix  $(n - r)$ -ten Ranges

$$\mathfrak{X}_r = \mathfrak{X}_{r-1} - \frac{\mathfrak{X}_{r-1} e_{v_r} a_r^* \mathfrak{X}_{r-1}}{a_r^* \mathfrak{X}_{r-1} e_{v_r}},$$

deren  $v_1$ -te,  $v_2$ -te,  $\dots$ ,  $v_r$ -te Spalte verschwinden. Die  $n - r$  nichtverschwindenden Spalten sind notwendigerweise linear unabhängig und stellen mithin ein vollständiges System von Lösungsvektoren des gegebenen Gleichungssystems (2) dar.

<sup>3</sup> Vgl. des Verfassers Abhandlung „On rank-diminishing operations and their application to the solution of linear equations“. Z. angew. Math. Phys. (im Druck).



Sind nun aber die gegebenen Gleichungen nicht linear unabhängig, dann eliminiert unser Verfahren automatisch jene Gleichungen, welche Folgen der vorangehenden sind. In der Tat, ist ein Vektor  $a_p^* x_q = 0$  für  $p > q$ , so ist  $a_p^* x = 0$  eine Folge der ersten  $q$  Gleichungen und kann daher weggelassen werden. In dieser automatischen Elimination linear abhängiger Gleichungen liegt ein besonderer Vorzug unserer Methode.

Um den Zusammenhang zwischen Purcells Algorithmus und unserem Verfahren zu zeigen, nehmen wir an, daß die ersten  $k-1$  Spalten von  $X_{k-1}$  verschwinden, das heißt, daß  $X_{k-1}$  die Gestalt

$$X_{k-1} = (0, \dots, 0, x_k^{k-1}, \dots, x_n^{k-1})$$

hat. Es gilt somit

$$X_{k-1} e_k = x_k^{k-1}, \quad a_k^* X_{k-1} = (0, \dots, 0, a_k^* x_k^{k-1}, \dots, a_k^* x_n^{k-1}), \quad a_k^* X_{k-1} e_k = a_k^* x_k^{k-1},$$

und vorausgesetzt, daß  $a_k^* x_k^{k-1} \neq 0$ , liefert unsere Rekursionsformel (3)

$$X_k = (0, \dots, 0, x_k^{k-1}, \dots, x_n^{k-1}) - x_k^{k-1} \left( 0, \dots, 0, \frac{a_k^* x_k^{k-1}}{a_k^* x_k^{k-1}}, \dots, \frac{a_k^* x_n^{k-1}}{a_k^* x_k^{k-1}} \right).$$

$X_k$  enthält infolgedessen die nachstehenden nichtverschwindenden Spalten

$$x_{k+h}^k = x_{k+h}^{k-1} - x_k^{k-1} \frac{a_k^* x_{k+h}^{k-1}}{a_k^* x_k^{k-1}}, \quad h = 1, 2, \dots, n-k,$$

was mit der Purcellschen Rekursionsformel (1) übereinstimmt. Im übrigen läßt sich auch unsere allgemeinere Methode geometrisch als wiederholter Projektionsvorgang interpretieren<sup>3</sup>.

Das Verfahren läßt sich überdies so ausgestalten, daß es die gleichzeitige Auflösung von zwei Gleichungssystemen leistet. Schreibt man diese Gleichungssysteme in der Gestalt

$$a_i^* x = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$\eta^* b_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

so hat man zunächst auf die Einheitsmatrix  $n$ -ter Ordnung  $\mathfrak{E}$  die rangvermindernde Operation

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{E} - \frac{b_1 a_1^*}{a_1^* b_1}$$

anzuwenden. Hierauf folgt

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_1 - \frac{\mathfrak{Z}_1 b_2 a_2^* \mathfrak{Z}_1}{a_2^* \mathfrak{Z}_1 b_2} \text{ usf.},$$

bis man schließlich nach  $r$  Schritten zu einer Matrix  $\mathfrak{Z}_r$  vom Range  $n-r$  gelangt, deren Spalten die Lösungsvektoren  $x$  und deren Zeilen die Lösungsvektoren  $\eta^*$  angeben. Natürlich ist darauf zu achten, daß die in den Nennern auftretenden Skalare nicht verschwinden<sup>3</sup>. Dies wurde im oben beschriebenen Verfahren dadurch erreicht, daß für die Vektoren  $b_k$  jeweils geeignete Einheitsvektoren  $e_{v_k}$  gewählt wurden.

(Eingegangen am 24. September 1957)



# Die dünne Kreisringplatte mit großer Ausbiegung

Von K. Federhofer, Graz

**Zusammenfassung.** Durch unmittelbare numerische Integration der beiden Grundgleichungen der dünnen Ringplatte mit kleiner Innenlochzahl  $q_i$  und kleiner Belastungszahl  $\theta^*$  wird bewiesen, daß die in einer früheren Arbeit erfolgte genäherte Integration dieser Grundgleichungen mit Hilfe des Verfahrens von Galerkin schon bei Verwendung nur eines Freiwertes dann zu praktisch vollkommen ausreichenden Ergebnissen führt, wenn die nichtlinearen Glieder in den Grundgleichungen durch jene Werte ersetzt werden, die sich aus dem Grenzfall der biegungssteifen Ringplatte ohne Membranwirkung (lineare Theorie) ergeben (Fall II a). Verwendet man hingegen bei der Berechnung dieser Glieder die Werte des Grenzfalles der reinen Ringmembran (Fall II b), so ergibt sich die größte Einsenkung um 14% zu niedrig, die größte Beanspruchung um 40% zu ungünstig. Schließlich zeigt die durchgeführte Untersuchung, daß die bisher übliche Vernachlässigung des Einflusses der Biegungssteifigkeit, das heißt die Anwendung der reinen Ringmembrantheorie bei kleinen Kennzahlen zu völlig unbrauchbaren Ergebnissen führt.

## Einleitung

Wenn eine dünne, am Außenrande festgehaltene Kreisringplatte unter dem Einflusse äußerer Lasten Durchbiegungen erfährt, die mit der Plattendicke vergleichbar oder noch größer als diese werden, so ist es üblich, solche dünne Ringplatten mit großer Ausbiegung nach der Ringmembrantheorie zu berechnen, das heißt auf die Biegungssteifigkeit der Ringplatte keine Rücksicht zu nehmen. Für zwei wichtige Lastannahmen, nämlich für den gleichförmigen Oberflächendruck und für eine nur am nicht gehaltenen Innenrand wirkende Belastung, wurde nach dieser Theorie die vollständige Berechnung von E. Schwerin<sup>1</sup> durchgeführt, und es konnte für den zweitgenannten Belastungsfall die Lösung der hierher gehörigen Grundgleichung — einer nichtlinearen Differentialgleichung 2. Ordnung — sogar streng in geschlossener Form dargestellt werden. Um die Zulässigkeit der Anwendung dieser Ringmembrantheorie bei der Berechnung von dünnen Ringplatten mit großer Ausbiegung beurteilen und ihren Gültigkeitsbereich abgrenzen zu können, ist aber die Kenntnis des Verhaltens solcher Ringplatten bei Berücksichtigung ihrer Biegungssteifigkeit notwendig, dies um so mehr, als aus früheren Untersuchungen von St. Way<sup>2</sup> und des Verfassers<sup>3</sup> bekannt ist, daß sich bei der dünnen, vollen Kreisplatte mit großer Durchbiegung recht beträchtliche Unterschiede in der Formänderung und in den Spannungen ergeben, wenn anstatt der genauen Theorie die einfachere, von H. Hencky<sup>4</sup> entwickelte Membrantheorie benutzt wird. Für den nach der Membrantheorie bereits streng gelösten Fall der nur am Innenrande belasteten Kreisringplatte habe ich daher in einer früheren Arbeit<sup>5</sup> die beiden Grundgleichungen einschließlich des von der Biegungssteifigkeit herrührenden Beitrages aufgestellt und diese zwei nichtlinearen Differentialgleichungen 2. Ordnung sodann genähert mit Hilfe des Verfahrens von Galerkin integriert. Die numerische Auswertung der allgemeinen Ergebnisse bestätigte vollauf die ursprüngliche Vermutung, daß sich so wie bei der vollen Kreisplatte auch bei der dünnen Ringplatte beträchtliche Unterschiede in den Spannungen ergeben, wenn bei deren Berechnung die Biegungssteifigkeit vernachlässigt, das heißt anstatt der genauen Theorie die Ringmembrantheorie benutzt wird. Die Abweichungen wachsen mit abnehmender Lochverhältniszahl (Verhältnis des Innen- zum Außenhalbmesser des Ringes) und mit abnehmender Belastungszahl; für Lochverhältnisse größer als 0.7 ist wenigstens die Formänderung durch die Ringmembrantheorie zutreffend dargestellt.

<sup>1</sup> E. Schwerin: Z. techn. Physik **10**, 651 (1929).

<sup>2</sup> St. Way: Trans. Amer. Soc. mechan. Engr. **56**, 627 (1934).

<sup>3</sup> K. Federhofer: Luftfahrt-Forsch. **21**, 1 (1944).

<sup>4</sup> H. Hencky: Z. Math. Physik **63**, 311 (1915).

<sup>5</sup> K. Federhofer: Z. angew. Math. Mechan. **25**, 5 (1945); Österr. Ing.-Arch. **1**, 21 (1946).



Da der Nachweis für das Versagen der Ringmembrantheorie bei kleinen Lochverhältniszahlen und kleinen Belastungszahlen auf Grund einer nur genäherten Integration der beiden vollständigen Grundgleichungen erbracht worden ist (und zwar bei Beschränkung auf einen einzigen Freiwert in dem bei Verwendung des Galerkinschen Verfahrens benutzten Näherungsansatz), so war es noch wünschenswert, über den Grad der Genauigkeit dieser genäherten Integration Aufschluß zu bekommen. Diesem Zweck dient die vorliegende Untersuchung, in der für Sonderwerte, die im Bereiche kleiner Kennzahlen liegen — und zwar für eine Lochverhältniszahl 0.1 und für eine Belastungszahl 4 —, die vollständigen Grundgleichungen unmittelbar numerisch integriert worden sind. Der Vergleich mit den nach dem Verfahren von Galerkin und bei Verwendung nur eines Freiwertes erhaltenen Ergebnissen zeigte, daß diese praktisch bereits vollkommen genügen.

### I. Die Grundgleichungen

Im folgenden werden die schon in der früheren Mitteilung gebrauchten Bezeichnungen und die maßgebenden Grundgleichungen angegeben.

$r_i, r_a$  Innen- und Außenhalbmesser der Ringplatte,

$h$  deren Dicke,

$P/2 r_i \pi$  Belastung je Längeneinheit des Umfanges am Innenrande,

$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)}$  Biegesteifigkeit,

$\varphi(r)$  Neigung der Meridiantangente am Orte  $r$ ,

$w(r)$  Einsenkung am Orte  $r$ ,

$E$  Elastizitätszahl des Plattenstoffes,

$\mu$  Poissonsche Zahl.

Mit  $u = \sin \varphi$  gelten für die Biegemomente  $G_1, G_2$  im Meridianschnitte und im dazu senkrechten zweiten Hauptschnitte die Formeln

$$G_1 = -D \left( \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right), \quad G_2 = -D \left( \frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right).$$

Die Membrankräfte  $T_1, T_2$  in den genannten Schnitten lassen sich mit Einführung einer dimensionslosen Funktion  $\psi(\varrho)$  und mit  $\varrho = \frac{r}{r_a}$  darstellen durch

$$T_1 = \frac{D}{r_a^2} \frac{\Psi}{\varrho}, \quad T_2 = \frac{D}{r_a^2} \frac{d\Psi}{d\varrho}.$$

Mit Einführung einer zweiten dimensionslosen Funktion  $\Phi(\varrho)$  gemäß

$$\Phi(\varrho) = 2 \sqrt{3} \frac{r_a}{h} u(\varrho)$$

und mit dem homogenen Differentialoperator

$$L(\ ) \equiv \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} - \frac{1}{\varrho^2}$$

lauten die vollständigen Grundgleichungen für die nur am Innenrande belastete Kreisringplatte mit großer Ausbiegung

$$L(\Psi) + m \frac{\Phi^2}{\varrho} = 0, \quad (1)$$

$$L(\Phi) - \frac{\Phi \Psi}{\varrho} + \frac{\partial^*}{\varrho} = 0, \quad (2)$$

worin die dimensionslose Belastungskennzahl (Plattenparameter)  $\vartheta^*$  in ihrer Abhängigkeit von der Belastung  $P$  und von den Abmessungen der Ringplatte durch

$$\vartheta^* = \frac{P}{\pi r_a E h} 12 \sqrt{3} (1 - \mu^2) \left( \frac{r_a}{h} \right)^3 \quad (3)$$

bestimmt ist, während  $m$  eine numerische Konstante ist, die gemäß

$$m = \frac{1 - \mu^2}{2} \quad (4)$$

nur vom Plattenstoffe ( $\mu$ ) abhängig ist.

## II. Lösung der Grundgleichungen 1 und 2 durch numerische Integration

Zunächst führen wir die beiden Grundgleichungen mit Hilfe der Substitutionen

$$\Phi = \frac{\eta}{\varrho}, \quad \Psi = \frac{\zeta}{\varrho}, \quad \varrho^2 = \xi$$

in die von den ersten Ableitungen freien Gleichungen

$$4 \xi^2 \frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} + m \eta^2 = 0, \quad (5)$$

$$4 \xi^2 \frac{d^2 \eta}{d \xi^2} - \eta \zeta + \vartheta^* \xi = 0 \quad (6)$$

über, die mit den Randbedingungen

$$2 \xi \frac{d \eta}{d \xi} - (1 - \mu) \eta = 0,$$

$$2 \xi \frac{d \zeta}{d \xi} - (1 + \mu) \zeta = 0$$

für  $\xi = \varrho_i^2$  (Innenrand) und  $\xi = 1$  (Außenrand) zu integrieren sind; die beiden ersten Bedingungen bringen das Verschwinden des Spannungsmomentes  $G_1$  am gelenkig ausgebildeten Innen- und Außenrand zum Ausdruck, die dritte und vierte Bedingung die Festhaltung der Ränder (ausgedrückt durch Nullsetzen der tangentialen Dehnung  $\varepsilon_2$ ).

Die numerische Integration wird durchgeführt mit der Annahme  $\mu = 1/3$  ( $m = 4/9$ ) für den Sonderfall  $\varrho_i = 0.1$  und  $\vartheta^* = 4$ . Dann lauten die beiden Grundgleichungen

$$9 \xi^2 \frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} + \eta^2 = 0,$$

$$4 \xi^2 \frac{d^2 \eta}{d \xi^2} - \eta \zeta + 4 \xi = 0,$$

und die Randbedingungen

$$3 \xi \frac{d \eta}{d \xi} - \eta = 0,$$

$$3 \xi \frac{d \zeta}{d \xi} - 2 \zeta = 0$$

$$\text{für } \xi_i = 0.01 \text{ und } \xi_a = 1.$$

Nach numerischer Ermittlung von 9 Näherungsfolgen, wobei mit dem aus der früheren Näherungsrechnung entnommenen Ausgangswertepaar  $\eta_i = 0.133$ ,  $\zeta_i = 0.0235$  begonnen wurde, ergab sich für den Innenrand bis auf die vierte Dezimale genau

$$\eta_i = 0.1340977, \quad \zeta_i = 0.01973649$$

und für den Außenrand bis auf die dritte Dezimale genau

$$\eta_a = 1.348502, \quad \zeta_a = 0.6453855.$$



Die ersten Ableitungen  $\frac{d\eta}{d\xi}$  und  $\frac{d\zeta}{d\xi}$  am Innenrande wurden unmittelbar aus den Randbedingungen für den Innenrand entnommen, jene für den Außenrand wurden beim schrittweisen Vordringen vom Innen- zum Außenrande zu

$$\eta_a^I = 0.4489819, \quad \zeta_a^I = 0.4301891$$

berechnet.

Hiemit liefern obige Randbedingungen am Außenrande

$$3 \xi \eta_a^I - \eta_a = -0.0015559 \quad (\text{anstatt Null}),$$

$$3 \xi \zeta_a^I - 2 \zeta_a = -0.0002037 \quad (\text{anstatt Null}).$$

Die Einsenkung  $w(\varrho)$  an der Stelle  $\varrho$  berechnet sich aus

$$-dw = \frac{h}{2\sqrt{3}} \Phi(\varrho) d\varrho$$

bei Beachtung der am Außenrand  $\varrho = 1$  zu erfüllenden Randbedingung  $w(1) = 0$  zu

$$w(\varrho) = \frac{h}{2\sqrt{3}} \int_{\varrho}^1 \Phi(\varrho) d\varrho.$$

Die Tabelle 1 enthält die hienach berechneten Ordinaten der Meridianlinie für eine Reihe der  $\varrho$ -Werte zwischen 0.1 und 1; in ihr sind auch die nach dem Galerkinschen Verfahren berechneten Ordinaten zum Vergleiche eingetragen. Dabei sind zwei Fälle (bezeichnet mit Fall II a und II b) zu unterscheiden, entsprechend den beiden Grenzfällen der biegungsfesten Ringplatte ohne Membranwirkung und der reinen Ringmembran. Für beide Grenzfälle sind die zugehörigen Grundgleichungen geschlossen integrierbar, so daß Näherungslösungen der in strenger Form nicht integrierbaren Gl. (1) und (2) dadurch zu gewinnen sind, daß die darin vorkommenden nicht-linearen Glieder durch jene Werte ersetzt werden, die sich aus einem der beiden Grenzfälle berechnen lassen<sup>5</sup>.

Schließlich enthält die Tabelle 1 auch jene Ordinaten, die sich unmittelbar aus der Ringmembrantheorie ohne Berücksichtigung der Biegungssteifigkeit ergeben.

Aus den Angaben der Tabelle 1 ist zu entnehmen, daß die unter Zugrundelegung des Falles II a nach dem Galerkinschen Verfahren mit Benutzung nur eines Freiwerthes berechnete Formänderung der Ringplatte praktisch bereits vollkommen mit der durch unmittelbare numerische Integration ermittelten Formänderung übereinstimmt; nicht so günstig liegen die Verhältnisse im Falle II b, in welchem sich bei

Tabelle 1. Einsenkungsverhältnisse  $w/h$

$\varrho$	Numerische Integration	Galerkinsches Verfahren		Reine Ringmembran Fall III
		Fall II a	Fall II b	
0.1	0.35103	0.35005	0.30079	0.68100
0.22361	0.30658	0.30721	0.24214	0.55
0.34641	0.26168	0.26328	0.19428	0.445
0.4	0.24124	0.24310	0.17525	0.405
0.56569	0.17554	0.17759	0.12115	0.278
0.69282	0.12371	0.12541	0.08321	0.193
0.77460	0.09026	0.09158	0.06003	0.14
0.91652	0.03291	0.03345	0.02165	0.053
0.95917	0.01600	0.01625	0.01051	0.025
1.0	0	0	0	0



Anwendung des gleichen Näherungsverfahrens Werte für die Formänderung ergeben, die gegenüber den genauen Werten um rund 14 % zu niedrig liegen.

Das Versagen der reinen Ringmembrantheorie im Bereiche kleiner Lochverhältniszahlen und kleiner Belastungskennzahlen ist aber erwiesen durch die Zahlenangaben der Spalte 5 in Tabelle 1, die um rund 94 % höher liegen als die nach der strengen Theorie berechneten Einsenkungswerte.

Die in den Randfasern  $\pm \frac{h}{2}$  durch die Spannungsmomente  $G_1, G_2$  erzeugten Biegungsspannungen betragen

$$E \frac{h^2}{r_a^2} \gamma_1 \quad \text{bzw.} \quad E \frac{h^2}{r_a^2} \gamma_2,$$

worin die Zahlenwerte  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  bestimmt sind durch

$$\gamma_1 = \frac{1}{4 \sqrt{3} (1 - \mu^2)} \left( \frac{d\Phi}{d\rho} + \mu \frac{\Phi}{\rho} \right),$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{4 \sqrt{3} (1 - \mu^2)} \left( \frac{\Phi}{\rho} + \mu \frac{d\Phi}{d\rho} \right).$$

Analog lassen sich die von den Membrankräften  $T_1, T_2$  herrührenden Spannungen darstellen in der Form  $E \frac{h^2}{r_a^2} \tau_1, E \frac{h^2}{r_a^2} \tau_2$  mit

$$\tau_1 = \frac{1}{12 (1 - \mu^2)} \frac{\Psi}{\rho}, \quad \tau_2 = \frac{1}{12 (1 - \mu^2)} \frac{d\Psi}{d\rho}.$$

Tabelle 2. Die Beiwerte  $\gamma_1, \gamma_2$  der Biegungsspannungen sowie  $\tau_1, \tau_2$  der Membranspannungen für den Innen- und Außenrand der Ringplatte

$\vartheta^* = 4, \mu = \frac{1}{3}$		$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\tau_1$	$\tau_2$
Innenrand $\varrho_i = 0.1$	Numer. Integration..	0	1.9355	0.18503	0.061677
	Fall II a .....	0	1.863	0.182	0.061
	Fall II b .....	0	2.753	0.171	0.057
	Ringmembrane .....	0	0	0.870	0.261
Außenrand $\varrho_a = 1$	Numer. Integration..	— 0.00016 (anstatt 0)	0.19458	0.060505	0.020156
	Fall II a .....	0	0.198	0.061	0.020
	Fall II b .....	0	0.128	0.037	0.012
	Ringmembrane .....	0	0	0.180	0.054

Die Tabelle 2 enthält eine Zusammenstellung der für den Innen- und Außenrand berechneten Spannungswerte  $\gamma$  und  $\tau$ . Auch hier stehen die für den Fall II a genähert berechneten Spannungsbeiwerte für die Biegungs- und Membranspannungen in sehr guter Übereinstimmung mit den durch numerische Integration der Grundgleichungen erhaltenen Werten. Die für den Fall II b durchgeführte Näherungsrechnung beurteilt die maximalen Spannungen (tangentielle Spannungen am Innenrande) um rund 40 % zu ungünstig, während die nach der reinen Ringmembrantheorie gewonnenen Ergebnisse zeigen, daß die gebräuchliche Vernachlässigung der Biegungssteifigkeit hinsichtlich der Beanspruchungen ein vollkommen unrichtiges Bild gibt, denn die am Innenrand auftretenden tangentialen Biegungsspannungen betragen mehr als das Doppelte der maximalen reinen Membranspannungen.

(Eingegangen am 25. September 1957)



# Über die Bestimmung der Wärmespannungen in ungleichförmig erwärmten Kontaktöfen\*

Von H. Jung, Stuttgart

Mit 6 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Es werden das Temperaturfeld und die dadurch auftretenden Wärmespannungen untersucht, wenn an einem Kontaktöfen der Ammoniaksynthese eine Betriebsstörung auftritt. Wir zeigen, daß ein nicht rotationssymmetrisches Temperaturfeld die Betriebsspannungen herabsetzt, so daß durch eine Betriebsstörung der Ofen nicht gefährdet wird.

## I. Einleitung und Problemstellung

Betriebsstörungen in Kontaktöfen zeigen sich durch eine ungleichmäßige Erwärmung des Mantels. An der Oberfläche des Mantels lassen sich durch Messungen mit Thermocolorfarben und Thermoelementen die Temperaturfelder einfach ermitteln.

An den Betriebsingenieur tritt nach Bestimmung der Temperaturen die Frage heran, ob die von ihm ermittelten Temperaturen im Kontaktöfen nicht auf unzulässige zusätzliche Wärmespannungen führen.

Erste Untersuchungen über nicht rotationssymmetrische Wärmespannungen wurden von F. Schau<sup>1</sup> und A. Stodola durchgeführt. Hierbei wurde angenommen, daß die Temperaturverteilung sich mit der Rohrlänge nicht ändert. Bei dem vorliegenden Problem ändert sich die Temperatur sehr stark mit der Rohrlänge, so daß wir diese vereinfachende Voraussetzung im vorliegenden Fall nicht anwenden können.

Wir wollen dieses für den Hochdruckapparatebau wichtige Problem erneut angreifen. In Kap. II geben wir ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Temperaturverteilung in Rohren an, wenn die Temperaturverteilung des Außenmantels und die Wärmeübergangszahl am Außenmantel bekannt ist. Das in Kap. II angegebene Verfahren vereinfachen wir in Kap. III. Die in Kap. III erhaltenen Temperaturverteilungen vereinfachen wir in Kap. IV noch weiter so, daß wir das vorliegende Problem in eine Aufgabe für den ebenen Spannungszustand und eine Aufgabe der Plattenbiegung aufspalten können. Diese beiden Teilaufgaben behandeln wir in Kap. V. Ein Zahlenbeispiel soll dann noch in Kap. VI durchgerechnet werden.

## II. Bestimmung der Temperaturverteilung

Der Kontaktöfen (kreiszyndrisches Rohr mit Außenhalbmesser  $r_a$  und Innenhalbmesser  $r_i$ ) bestehe aus einem isotropen homogenen Werkstoff mit einer von der Temperatur unabhängigen Wärmeleitzahl  $\lambda$ . Das den Ofen umgebende Medium habe die konstante Temperatur  $T_0$ . Die Wärmeübergangszahl an der Außenwand des Ofens sei  $\alpha_a$ .

Die stationäre Temperaturverteilung  $T$  im Ofen genügt dann bei Verwendung eines Polarkoordinatensystems  $(r, \varphi, z)$  der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Die Randbedingungen lauten

$$\left. \begin{aligned} T &= T_a(\varphi, z), \\ T_0 &= \frac{\lambda}{\alpha_a} \frac{\partial T}{\partial r} + T \end{aligned} \right\} \text{ für } r = r_a. \quad (2)$$

\* Vorliegende Untersuchung wurde mit Unterstützung der BASF Ludwigshafen durchgeführt.

<sup>1</sup> E. Melan und H. Parkus: Wärmespannungen, S. 32. Wien: Springer-Verlag. 1953.



Die Lösung der Differentialgleichung (1) setzen wir in der Form an:

$$T = T_0 + a_0 + a_1 \ln r + \sum T_m \cos m \varphi. \quad (3)$$

(3) in (1) eingesetzt ergibt

$$\frac{\partial^2 T_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_m}{\partial z^2} - m^2 T_m = 0. \quad (4)$$

Mit (3) gehen die Randbedingungen (2) über in

$$\left. \begin{aligned} T_a &= T_0 + a_0 + a_1 \ln r_a + \sum T_m(r_a, z) \cos m \varphi; \\ 0 &= \frac{\lambda}{\alpha_a} \frac{a_1}{r_a} + a_0 + a_1 \ln r_a + \sum \left[ \frac{\lambda}{\alpha_a} \frac{\partial T_m}{\partial r} + T_m \right]_{r=r_a} \cos m \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ist  $Q$  die bei einem bestimmten Durchsatz des Kontaktofens frei werdende Wärmemenge, so können wir  $a_0$  und  $a_1$  so bestimmen, daß diese Wärmemenge gerade durch ein rotationssymmetrisches Feld abgeführt wird. Wir erhalten dann für die Temperaturverteilung, wenn  $h$  die Länge des Ofens ist,

$$T = T_0 + \frac{Q}{2 \pi h \lambda} \left( \frac{\lambda}{\alpha_a} \frac{1}{r_a} + \ln \frac{r_a}{r} \right) + \sum T_m(r, z) \cos m \varphi. \quad (6)$$

(6) in (5) eingesetzt, führt auf

$$\left. \begin{aligned} T_a - T_0 - \frac{Q}{2 \pi h r_a \alpha_a} &= \sum_0^\infty T_m(r_a, z) \cos m \varphi, \\ 0 &= \left[ \frac{\lambda}{\alpha_a} \frac{\partial T_m}{\partial r} + T_m \right]_{r=r_a}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Mit der Reihenentwicklung der Oberflächentemperatur

$$T_a = \sum_0^\infty \bar{T}_m(z) \cos m \varphi; \quad \bar{T}_0 = T_0 + \frac{Q}{2 \pi h r_a \alpha_a} \quad (8)$$

erhalten wir

$$T_m(r_a, z) = \bar{T}_m(z). \quad (9)$$

Durch die zweite Gleichung aus (7) und durch (9) sind uns die Randbedingungen für die Funktion  $T_m(r, z)$  gegeben.

Die Lösung läßt sich mit Hilfe der Fourier-Transformation durchführen. Mit den Zylinderfunktionen  $J_m(ipr)$  und  $N_m(ipr)$  und den Abkürzungen

$$Z_1(ipr_a) \equiv J_m(ipr_a) + \frac{ip\lambda}{2\alpha_a} [J_{m-1}(ipr_a) - J_{m+1}(ipr_a)],$$

$$Z_2(ipr_a) \equiv N_m(ipr_a) + \frac{ip\lambda}{2\alpha_a} [N_{m-1}(ipr_a) - N_{m+1}(ipr_a)]$$

erhalten wir nach einiger Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \frac{Q}{2 \pi h \lambda} \left( \frac{\lambda}{\alpha_a} \frac{1}{r_a} + \ln \frac{r_a}{r} \right) + \\ &+ \frac{1}{2 \pi} \sum_1^\infty \cos m \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_2(ipr_a) J_m(ipr) - Z_1(ipr_a) N_m(ipr)}{Z_1(ipr_a) J_m(ipr_a) - Z_2(ipr_a) N_m(ipr_a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}_m(\zeta) e^{ip(\zeta-z)} d\zeta dp. \end{aligned} \quad (10)$$

Die Auswertung der in (10) auftretenden Integrale wird nur in den wenigsten Fällen möglich sein. Wir sind daher gezwungen, um praktisch brauchbare Ergebnisse zu erhalten, eine speziellere Lösung, die den im Betrieb auftretenden Temperaturverteilungen möglichst gut angepaßt werden kann, zu ermitteln.



### III. Ableitung einer speziellen Lösung

Die meisten im Betrieb auftretenden Temperaturverteilungen lassen sich durch

$$T_a(z, \varphi) = T^* + \sum A_n e^{-\mu_n(z-\zeta_n)^2} \cos \frac{(\varphi - \psi_n)}{2} \quad (11)$$

annähern. Für viele Fälle können wir uns auf die Temperaturverteilung

$$T_a(z, \varphi) = T^* + A e^{-\mu z^2} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (11a)$$

beschränken.

Gehen wir mit der Temperaturverteilung (11a) in (10) ein, dann wird

$$T = T^* + \frac{r_a \alpha_a}{\lambda} (T^* - T_0) \ln \frac{r_a}{r} + \frac{A}{2\pi} \cos \frac{\varphi}{2} \left\{ \sqrt{\frac{r_a}{r}} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ p \operatorname{Erfi} p(r_a - r) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{\alpha_a}{\lambda} - \frac{1}{2r_a} \right) \operatorname{Erfi} p(r_a - r) \right] \frac{1}{p} e^{-\frac{p^2}{4\mu} - i p z} dp \right\} \quad (12)$$

Das in (12) auftretende Integral läßt sich mit Hilfe der Gauß-Transformation auswerten. Wir erhalten

$$T = T^* + \frac{r_a \alpha_a}{\lambda} (T^* - T_0) \ln \frac{r_a}{r} + A \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{r_a}{r}} \left\{ e^{-\mu[z^2 - (r_a - r)^2]} \cos 2\mu z(r_a - r) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\alpha_a}{\lambda} - \frac{1}{2r_a} \right) e^{-\mu z^2} \int_0^{(r_a - r)} e^{\mu \zeta^2} \cos 2\mu z \zeta d\zeta \right\}. \quad (13)$$

Beachten wir, daß  $\mu(r_a - r)^2 < 1$  ist, so können wir die Exponentialfunktionen in (13) durch ihre Potenzreihen ersetzen. Das in (13) noch auftretende bestimmte Integral läßt sich dann auch auswerten. Es wird damit die Temperaturverteilung

$$T = T^* + \frac{r_a \alpha_a}{\lambda} (T^* - T_0) \ln \frac{r_a}{r} + A \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{r_a}{r}} \left\{ e^{-\mu[z^2 - (r_a - r)^2]} \cos 2\mu z(r_a - r) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\alpha_a}{\lambda} + \frac{1}{2r_a} \right) \frac{e^{-\mu z^2}}{2\mu z} \left[ \left( 1 + \mu(r_a - r)^2 - \frac{1}{2\mu z^2} \right) \sin 2\mu z(r_a - r) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{r_a - r}{z} \cos 2\mu z(r_a - r) \right] \right\}. \quad (14)$$

Für  $z = 0$  und  $r = r_i$  erhalten wir das für den Betriebsleiter wichtige Temperaturmaximum

$$T_{\max} = T^* + \frac{r_a \alpha_a}{\lambda} (T^* - T_0) \ln \frac{r_a}{r_i} + A \sqrt{\frac{r_a}{r_i}} \left\{ e^{\mu(r_a - r_i)^2} + \left( \frac{\alpha_a}{\lambda} + \frac{1}{2r_a} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[ (r_a - r_i) + \mu \frac{(r_a - r_i)^3}{3} + \frac{\mu^2}{10} (r_a - r_i)^5 + \dots \right] \right\}. \quad (15)$$

Durch (14) ist ein unseres Erachtens für den Betrieb brauchbarer Ausdruck gegeben.

### IV. Umformung und Vereinfachung der Temperaturverteilung

Zur Bestimmung der Wärmespannungen müssen wir die Temperaturverteilung noch vereinfachen. Wir führen zu diesem Zweck das durch Abb. 1 gegebene kartesische Koordinatensystem ein. Es ist damit

$$x = r_a \cdot \varphi; \quad y = r_a - r; \quad z = z.$$



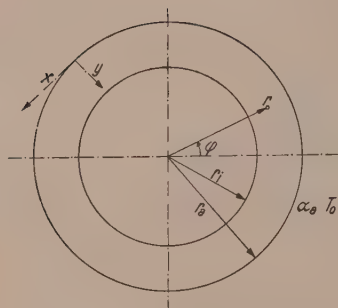


Abb. 1. Koordinatensystem

Mit diesen Veränderlichen wird der nicht rotationsymmetrische Anteil der Temperaturverteilung (13)

$$\tilde{T} = A \cos \frac{x}{2r_a} \sqrt{\frac{1}{1-y/r_a}} \left\{ e^{-\mu(z^2-y^2)} \cos 2\mu z y + \left( \frac{\alpha_a}{\lambda} - \frac{1}{r_a} \right) e^{-\mu z^2} \int_0^y e^{\mu y^2} \cos 2\mu z y dy \right\} \quad (16)$$

Ist  $1 > \frac{y}{r_a}$  und  $\mu y^2 \ll 1$ , so wird, wenn wir  $\sqrt{\frac{1}{1-y/r_a}}$  und die Exponentialfunktionen in Potenzreihen entwickeln, wobei von diesen Potenzreihen nur die linearen Glieder berücksichtigt werden,

$$\tilde{T} = A \cos \frac{x}{2r_a} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{y}{r_a} \right) e^{-\mu z^2} \left[ 1 + \left( \frac{\alpha_a r_a}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) \frac{y}{r_a} \right]. \quad (17)$$

Es ist zweckmäßig, die dimensionslosen Größen

$$\frac{x}{2r_a} = \bar{x}; \quad \frac{y}{2r_a} = \bar{y}; \quad \frac{z}{2r_a} = \bar{z}; \quad \bar{\mu} = 4r_a^2 \mu$$

in (17) einzuführen. Berücksichtigen wir nur die linearen Glieder in  $\bar{y}$ , dann wird

$$\tilde{T} = A \cos \bar{x} e^{-\bar{\mu} \bar{z}^2} \left[ 1 + \frac{2\alpha_a r_a}{\lambda} \bar{y} \right]. \quad (18)$$

Die Temperaturverteilung (18) spalten wir in einen symmetrischen und asymmetrischen Bestandteil auf.

Mit

$$\bar{y} = \xi + \frac{\delta}{2}; \quad \frac{\delta}{2} = \frac{1}{4r_a} (r_a - r_i)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \tilde{T}_0 + \tilde{T}_1, \\ \tilde{T}_0 &= A \cos \bar{x} e^{-\bar{\mu} \bar{z}^2} \left[ 1 + \frac{2\alpha_a r_a}{\lambda} \frac{\delta}{2} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\tilde{T}_1 = A \frac{2\alpha_a r_a}{\lambda} \xi \cos \bar{x} e^{-\bar{\mu} \bar{z}^2}. \quad (20)$$

Die Vereinfachungen, die auf (19) und (20) führen, bilden die Rohroberfläche auf eine ebene Scheibe und eine Platte ab.

Bezeichnen wir mit  $\eta$  die Querdehnungszahl und  $\nu$  die lineare Wärmeausdehnungszahl, so können wir die durch die Temperaturverteilung (19) bedingten Spannungen aus dem Verschiebungspotential bestimmen. Das Verschiebungspotential genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} = \left[ 1 + \frac{1}{\eta} \right] \nu A \cos \bar{x} e^{-\bar{\mu} \bar{z}^2} \left[ 1 + \frac{2\alpha_a r_a}{\lambda} \frac{\delta}{2} \right]. \quad (21)$$

Bezeichnen wir mit  $G$  den Schubmodul, dann sind die Spannungen

$$\sigma_{xx} = -2G \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2}; \quad \sigma_{zz} = -2G \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xz} = 2G \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x \partial z}. \quad (22)$$

Die Spannungen (22) müssen den Grenzbedingungen genügen

$$z \rightarrow \pm \infty, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} \rightarrow 0. \quad (23)$$

Die Temperaturverteilung (20) führt auf Spannungen, die sich mit Hilfe der Plattendurchbiegung  $w$  berechnen lassen. Die Durchbiegung  $w$  muß der Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} + \nu \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) A \frac{2 \alpha_a r_a}{\lambda} \cos \bar{x} e^{-\mu \bar{z}^2} = 0. \quad (24)$$

Aus der Durchbiegung ergeben sich die Spannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{E \xi}{1 + \left(\frac{1}{\eta}\right)^2} \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \nu \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) A \frac{2 \alpha_a r_a}{\lambda} \cos \bar{x} e^{-\mu \bar{z}^2} \right], \\ \sigma_{zz} &= -\frac{E \xi}{1 + \left(\frac{1}{\eta}\right)^2} \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} + \nu \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) A \frac{2 \alpha_a r_a}{\lambda} \cos \bar{x} e^{-\mu \bar{z}^2} \right], \\ \sigma_{xy} &= -\frac{E \xi}{1 + \left(\frac{1}{\eta}\right)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die durch (25) gegebenen Spannungen müssen ebenfalls den Grenzbedingungen (23) genügen.

### V. Bestimmung der Wärmespannungen

Zur Lösung der Differentialgleichung (21) machen wir den Ansatz

$$\Psi = \cos \bar{x} \Phi(\bar{z}). \quad (26)$$

(26) in (21) eingeführt, ergibt

$$\frac{d^2 \Phi}{d\bar{z}^2} - \Phi(\bar{z}) = \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \nu A \left(1 + \frac{2 \alpha_a r_a}{\lambda} \frac{\delta}{2}\right) e^{-\mu \bar{z}^2}. \quad (27)$$

Die den Grenzbedingungen (23) genügende Lösung der Differentialgleichung (27) lautet

$$\Phi(\bar{z}) = -A \left(1 + \frac{\alpha_a r_a}{\lambda} \delta\right) \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \nu \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{p^2}{4\mu} + i p \bar{z}\right)} dp. \quad (28)$$

Damit ist die Verschiebungsfunktion

$$\Psi(\bar{x}, \bar{z}) = -A \cos \bar{x} \left(1 + \frac{\alpha_a r_a}{\lambda} \delta\right) \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \nu \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{p^2}{4\mu} + i p \bar{z}\right)} dp. \quad (29)$$

Nach einiger Umformung wird

$$\left. \begin{aligned} \Psi(\bar{x}, \bar{z}) &= -A \cos \bar{x} \left(1 + \frac{\alpha_a r_a}{\lambda} \delta\right) \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \frac{\nu}{2} e^{\frac{1}{4\mu}} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\mu}}} e^{-\zeta^2} d\zeta \mathfrak{E}_0 \bar{z} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \mathfrak{S} \sin \bar{z} + e^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} e^{-\frac{(1+2\mu\zeta)^2}{4\mu}} d\zeta - e^{-\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} e^{-\frac{(1-2\mu\zeta)^2}{4\mu}} d\zeta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

In entsprechender Weise erhalten wir die Durchbiegung  $w$  zu

$$\left. \begin{aligned} w(\bar{x}, \bar{z}) &= A \cos \bar{x} \frac{2 \alpha_a r_a}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \frac{\nu}{2} e^{\frac{1}{4\mu}} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\mu}}} e^{-\zeta^2} d\zeta \mathfrak{E}_0 \bar{z} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \mathfrak{S} \sin \bar{z} + e^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} e^{-\frac{(1+2\mu\zeta)^2}{4\mu}} d\zeta - e^{-\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} e^{-\frac{(1-2\mu\zeta)^2}{4\mu}} d\zeta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$



Aus (30) und (31) bestimmen wir die durch das nicht rotationssymmetrische Temperaturfeld (18) hervorgerufenen Spannungen. Führen wir die ursprünglichen Koordinaten  $r, \varphi, z$  ein, dann ist

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= 2GA \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \frac{\nu}{2} \left[1 + \frac{\alpha_a(r_a - r)}{\lambda}\right] \cos \frac{\varphi}{2} \left[\bar{\Phi}\left(\frac{z}{2r_a}\right) - 2e^{-\mu\left(\frac{z}{2r_a}\right)^2}\right], \\ \sigma_{zz} &= -2GA \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \frac{\nu}{2} \left[1 + \frac{\alpha_a(r_a - r)}{\lambda}\right] \cos \frac{\varphi}{2} \bar{\Phi}\left(\frac{z}{2r_a}\right), \\ \sigma_{\varphi z} &= 2GA \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \frac{\nu}{2} \left[1 + \frac{\alpha_a}{\lambda}(r_a - r)\right] \sin \frac{\varphi}{2} e^{\frac{1}{4\mu}} \left[ \frac{2}{\sqrt{\mu}} \operatorname{Si} \frac{z}{2r_a} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{\mu}}} e^{-\zeta^2} d\zeta + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \operatorname{Erf} \frac{z}{2r_a} + e^{\frac{z}{2r_a}} \int_0^{\frac{z}{2r_a}} e^{-\frac{(1+2\mu\zeta)^2}{4\mu}} d\zeta + e^{-\frac{z}{2r_a}} \int_0^{\frac{z}{2r_a}} e^{-\frac{(1-2\mu\zeta)^2}{4\mu}} d\zeta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

In (32) haben wir zur Abkürzung gesetzt

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}\left(\frac{z}{2r_a}\right) &= e^{\frac{1}{4\mu}} \left[ \frac{2}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{\mu}}} e^{-\zeta^2} d\zeta \operatorname{Erf} \frac{z}{2r_a} - \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \operatorname{Si} \frac{z}{2r_a} + e^{\frac{z}{2r_a}} \int_0^{\frac{z}{2r_a}} e^{-\frac{(1+2\mu\zeta)^2}{4\mu}} d\zeta - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{z}{2r_a}} \int_0^{\frac{z}{2r_a}} e^{-\frac{(1-2\mu\zeta)^2}{4\mu}} d\zeta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Die in (32) und (33) auftretenden Integrale lassen sich einfach mit Hilfe der Tabellen von Jahnke-Emde<sup>2</sup> berechnen.

Für die Außenwand des Rohres wird

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= 2GA \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \frac{\nu}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \left[\bar{\Phi}\left(\frac{z}{2r_a}\right) - e^{-\mu z^2}\right], \\ \sigma_{zz} &= -2GA \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \frac{\nu}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \bar{\Phi}\left(\frac{z}{2r_a}\right), \\ \sigma_{\varphi z} &= 2GA \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \frac{\nu}{2} \sin \frac{\varphi}{2} e^{\frac{1}{16r_a^2\mu}} \left[ \frac{1}{r_a\sqrt{\mu}} \int_0^{\frac{1}{4r_a\sqrt{\mu}}} e^{-\zeta^2} d\zeta \operatorname{Si} \frac{z}{2r_a} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2r_a} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \operatorname{Erf} \frac{z}{2r_a} + e^{\frac{z}{2r_a}} \int_0^{\frac{z}{2r_a}} e^{-\frac{(1+2\mu\zeta)^2}{4\mu}} d\zeta + e^{-\frac{z}{2r_a}} \int_0^{\frac{z}{2r_a}} e^{-\frac{(1-2\mu\zeta)^2}{4\mu}} d\zeta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Aus (32) ergibt sich, daß im Rahmen dieser Annäherung die Radialspannungen durch die nicht rotationssymmetrischen Temperaturverteilung nicht beeinflußt werden. Aus (34) entnehmen wir, daß das Temperaturfeld die Spannungen an der Außenwand herabsetzt, so daß durch die ungleichförmige Temperaturverteilung der Kontaktroten nicht gefährdet werden kann. Wir wollen an einem Zahlenbeispiel untersuchen, wie die im Laufe der Rechnung eingeführten Vereinfachungen sich auswirken.

<sup>2</sup> Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen, S. 23. Leipzig. 1952.

## VI. Zahlenbeispiel

Zur Durchrechnung des Zahlenbeispiels wählen wir

$$r_a = 0.7 \text{ m}; r_i = 0.5 \text{ m}, \alpha_a = 10 \text{ kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}; \lambda = 50 \text{ kcal/m h } ^\circ\text{C}.$$

$$\nu = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}; G = 0.85 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2; \eta = 3.$$

$$T_0 = 20^\circ\text{C}; T^* = 110^\circ\text{C}; A = 90^\circ\text{C}; \mu = 1.0996.$$

Mit diesen Zahlenwerten wird (14)

$$\begin{aligned} T(r, \varphi, z) = & \\ = 110 + 12.6 \ln \frac{r_a}{r} + 90 & \left\{ \sqrt{\frac{r_a}{r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left\{ e^{-1.0996 [z^2 - (r_a - r)^2]} \cos 2.1992 z (r_a - r) - \right. \right. \\ & - 0.234 \frac{e^{-1.0996 z^2}}{z} \left[ \left( 1 + 1.0996 (r_a - r)^2 - \frac{0.455}{z^2} \right) \sin 2.1992 z (r_a - r) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{r_a - r}{z} \cos 2.1992 z (r_a - r) \right] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

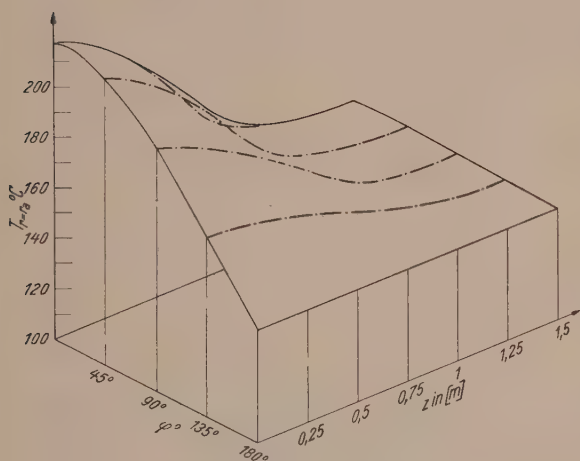


Abb. 2. Temperaturverteilung als Funktion von  $z$  und  $\varphi$

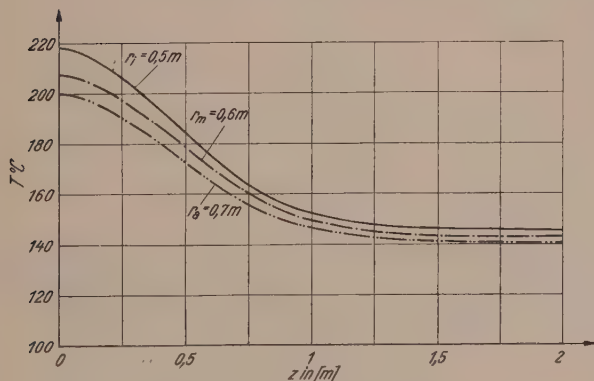


Abb. 3. Temperaturverteilung,  $\varphi = 0$

Abb. 2 gibt die Temperaturverteilung als Funktion von  $z$  und  $\varphi$  für  $r = r_i$ . In Abb. 3 haben wir die Temperaturverteilung für  $\varphi = 0$  als Funktion von  $z$  mit dem Radius als Parameter aufgetragen. Da wir die Temperaturverteilung (14) zur Berechnung der Wärmespannungen durch (18) annähern, ist in Abb. 4 die Temperaturdifferenz ( $\tilde{T} - T$ ) als Funktion von  $z$  mit  $r$  als Parameter gegeben. Aus Abb. 4 entnehmen wir, daß für das vorliegende Zahlenbeispiel die durch (18) gegebene Annäherung ausreichend ist.

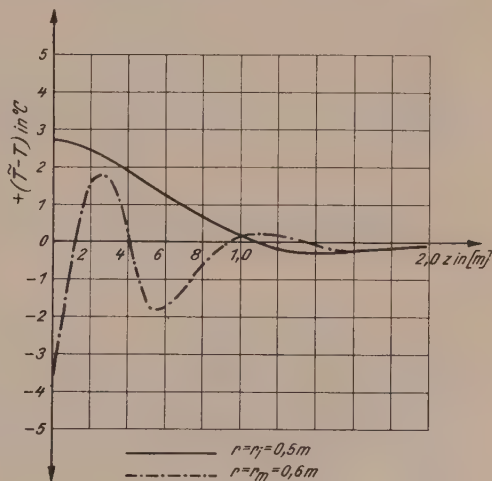


Abb. 4. Temperaturdifferenz,  $\tilde{T} - T$

Wir bestimmen nun noch die Wärmespannungen. Abb. 5 gibt die Wärmespannungen durch den rotationssymmetrischen Anteil der Temperaturverteilung

$$T_r = 16.8 \ln \frac{r_a}{r}.$$



Abb. 6 gibt die aus (32) ermittelten Wärmespannungen für  $\varphi = 0$  als Funktion von  $z$  für  $r = r_i$ . Die Zahlenrechnung zeigt, daß sich die Spannungen für  $r = r_a$  nur unwesentlich ändern, so daß wir auf ihre Angabe verzichten können.

Den Wärmespannungen überlagern sich noch die Betriebsspannungen durch

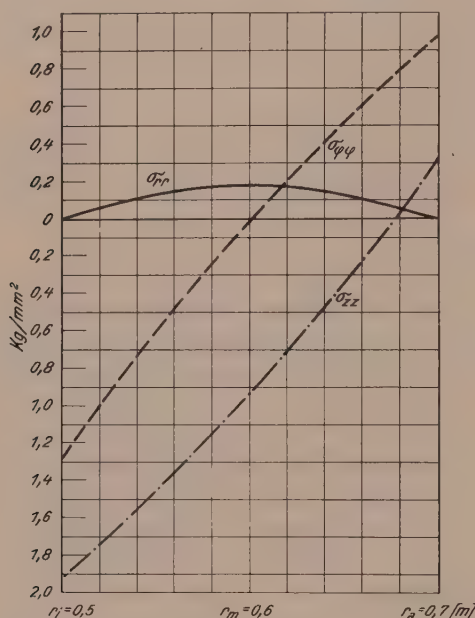


Abb. 5. Rotationssymmetrische Spannungen

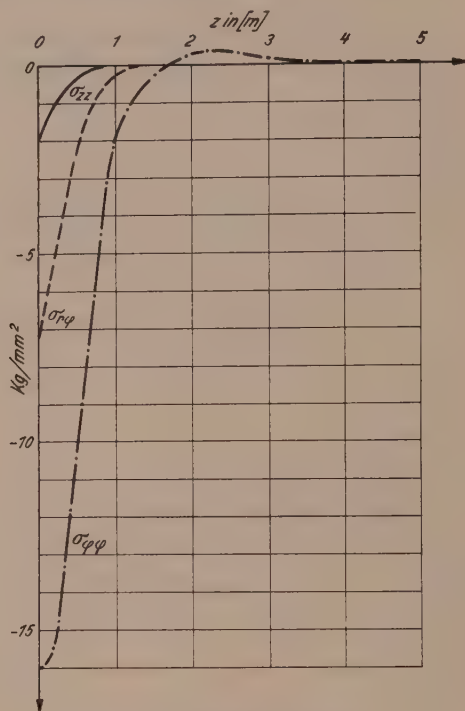


Abb. 6. Zusatzspannungen

den Innendruck  $p_i$ . Bekanntlich ruft der Innendruck  $p_i$  eine tangentielle Zugspannung hervor. Diese tangentielle Zugspannung wird im vorliegenden Beispiel des Kontakt-ofens durch das nicht rotationssymmetrische Temperaturfeld herabgesetzt.

Dieses im ersten Augenblick überraschende Ergebnis ist unseres Erachtens für den Betrieb von Kontaktöfen von großer Bedeutung, da es dem Betriebsingenieur erhöhte Sicherheit bei Betriebsstörungen gibt.

(Eingegangen am 4. Oktober 1957)

## Transverse Bending of Thin Shallow Shells of Translation

By Gunhard-Aestius Oravas, Venezuela

With 4 Figures

**Summary.** Thin translational shells are investigated in this treatise for transverse boundary perturbations. Mushtari-Vlasov thin shallow shell equations were employed in the derivation of the translational thin shell's solution in terms of normal displacement function. This solution is implemental in the satisfaction of higher order boundary conditions (displacement, stress couple and rotation) of the thin shell of translation. The remaining boundary conditions are satisfied by the momentless state of stress.

An illustrative example demonstrates that the transverse bending region is actually a narrow zone around the edges of the thin translational shell. It also seems evident that along most part of the boundary the transverse bending is very little dependent upon the coordinate parallel to the boundary. In the vicinity of the shell's corners the transverse bending is heavily dependent upon both coordinates.

Many boundary supporting arches may be of such proportions, which can offer considerable rotational restraint to the edges of translational shells. In such cases it is advisable to design the

thin translational shell both for simple and fully fixed support. Full restraint condition exists at the common boundary of the twin thin shells shown in Fig. 3.

### Synopsis

A number of papers\* have been written on the momentless theory of thin translational shells. The transverse bending of translational shells on the other hand has received relatively little attention.

In this paper an approximate solution is developed for boundary perturbation of shallow shells of translation which enclose a square base. Some general conclusions are drawn.

### Introduction

Thin shallow shells of translation, with positive Gaussian curvature  $\left(\frac{1}{R_\alpha} \cdot \frac{1}{R_\beta} > 0\right)$  and enclosing an almost square base, are investigated in this paper for transverse bending perturbations propagated by normal surface loading.

The basic shallow thin shell theory, that is utilized in the following development, was derived in terms of generalized orthogonal curvilinear coordinates by Mushtari<sup>9</sup> and Vlasov<sup>20</sup>.

An equivalent thin shallow shell theory was developed by Marguerre<sup>8</sup> through energetical considerations in "almost" Cartesian coordinates. Nazarov<sup>11</sup> arrived at the same set of linearized equations by poignant analysis of shallow shell's differential geometry.

According to Vlasov the radii of the curved generatrices, which describe the middle surface of the shell, can be assumed to be constant for shallow shells (ratio of shell rise to span  $\leq 1/5$ ). This approximation in practical design has negligible influence on the final solution.

The two fundamental shallow shell equations admit an elegant reduction to one single complex differential equation which yields to an elementary solution for a translational shell over a square base.

To the writers knowledge the true complex variable method was first used in problems of elasticity by Russian mathematician G. V. Kolosov in his doctorate dissertation<sup>7</sup> at the University of Tartu (Dorpat), Estonia in 1909.

The "complex" method of analysis introduced in this paper is not a true complex variable method as outlined by Kolosov in his dissertation. The "complex" method used here was introduced into the theory of shells by Goldenveizer<sup>4</sup> in 1939. Since then it has been further developed and amplified by Russian mathematicians Novoshilov<sup>12, 13</sup>, Goldenveizer, Lure, Georgian mathematician Vekua and Estonian mathematician Alumäe (Alumyae).

On the classical methods of shell analysis (neglecting the transverse shear deformation and excluding any possible finite displacements in the behavior of thin shells) the book by Goldenveizer<sup>3</sup> gives an extensive and rigorous treatment on the theory of shells with applications of "complex" methods.

In Western Europe the German elastician W. Zerna and English mathematician A. E. Green developed the complex methods of analysis in connection with classical and non-classical theory of shells<sup>5</sup>.

In America E. Reissner<sup>15, 16</sup> and P. M. Naghdi<sup>10</sup> have contributed significantly to this aspect of thin shell analysis. The contributions by Green, Zerna and Naghdi do not neglect the transverse stress deformation upon the general behavior of the shell and therefore, are theoretically more accurate than other available expositions.

\* See 1, 2, 6, 14, 17, 18, 19 and 21. Numbers refer to Bibliography.



The practical application of the theory of shells in the field of structural engineering, however, makes many simplifications possible. The transverse shear deformation has very small influence on the outcome of the solution for such structures and is always neglected under normal conditions of loading. Also the shallowness of the shell's geometry enables still further simplifications to be introduced in the rigorous classical theory of shells.

The final outcome of this judicious reduction is expressed in Mushtari-Vlasov equations, that are used as a starting point of analysis in this paper. A solution of the said differential equations is demonstrated in the following work for a thin shell of translation spanning a square base. Even though the derivation of the simplified equations is very difficult and a task worthy of the most talented in the profession, the solution obtained from them in this paper is elementary and easy to apply. All the steps required in the execution of this solution should be easily understandable for engineers with the usual background in college mathematics.

For the consolation of structural engineers, whose calculus has become rusty over years of inactivity in theoretical work, it can be ascertained that the knowledge of higher mathematics is not necessary for the sole purpose of applying the ultimate solution to practical problems. One such representative example is included to illustrate the behavior of the translational shell under the action of transverse bending.

Finally readers' attention is called to the effort made in this paper, following leading authorities in this field, to propagate a practice of more precise terminology by referring to internal resisting moments and forces as stress couples and stress resultants respectively.

### Fundamental Differential Equation for Shallow Shells

#### Formulation of Complex Differential Equation

The generalized differential equations of Mushtari-Vlasov for thin shallow shells are

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 \Phi - E h \bar{\nabla}^2 w &= - (1 - \nu) \nabla^2 \Gamma - E h \nabla^2 (\gamma T), \\ \nabla^4 w + \frac{1}{D} \bar{\nabla}^2 \Phi &= \frac{p_n}{D} - \frac{\Gamma}{D} \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where

$\Gamma$  = external load intensity potential function (see  $p_\alpha$  and  $p_\beta$  below),

$p_n$  = load intensity normal to the middle surface of the shell,

$$\left. \begin{aligned} p_\alpha &= - \frac{\partial \Gamma}{A \partial \alpha} \\ p_\beta &= - \frac{\partial \Gamma}{B \partial \beta} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Intensity of tractional loading acting in direction of } \alpha \text{ and } \beta \text{ coordinates} \\ \text{respectively,} \end{array}$$

$w$  = Displacement function ( $w$  is normal to shell's middle surface),

$\Phi$  = Stress function,

$h$  = Constant shell thickness,

$D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$ ,

$\gamma$  = Coefficient of thermolinear expansion,

$T = T(\alpha, \beta)$  = Temperature distribution function that describes the differential thermal increase or decrease from a stress and strain free temperature level of the shell bringing about an extension or contraction of shell's middle surface,

$E$  = Young's modulus,

$\nu$  = Poisson's ratio.

The differential operators convey the following meanings:

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \right\},$$

$$\bar{\nabla}^2 \equiv \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{R_\beta} \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{R_\alpha} \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \right\}$$

and

$$\nabla^4 \equiv \nabla^2 \nabla^2.$$

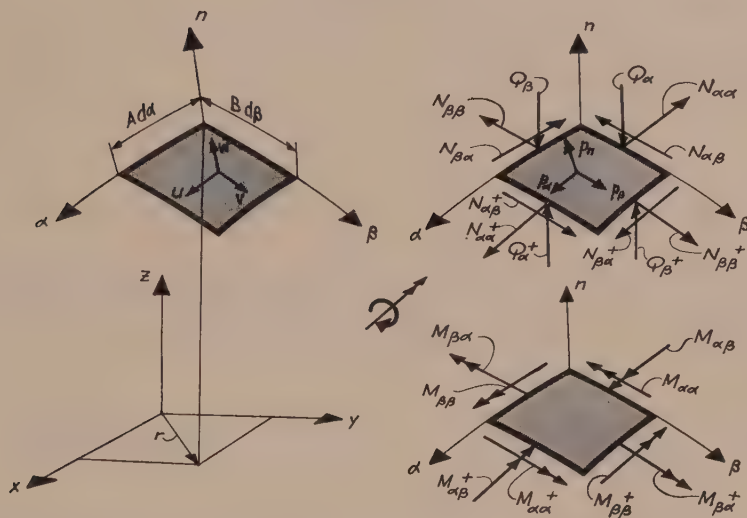


Fig. 1. Differential Element of Shell's Middle Surface with Stress Resultants, Stress Couples, Surface Load Intensities and Embedded Curvilinear Coordinates

The coefficients  $A^2 = [A(\alpha, \beta)]^2$  and  $B^2 = [B(\alpha, \beta)]^2$  are the first order fundamental magnitudes of the middle surface of the thin shell. The radii  $1/R_\alpha$  and  $1/R_\beta$  are the curvatures of the curvilinear coordinates  $\beta = \text{constant}$  and  $\alpha = \text{constant}$  respectively (Fig. 1). The parametric coordinates  $\alpha$  and  $\beta$  are assumed to coincide with the principal lines of curvatures on the middle surface of the shell\*.

The sectional quantities, stress resultants and stress couples, are expressed conveniently through stress function  $\Phi$  and displacement function  $w^3$  (Fig. 1):

$$N_{\alpha\alpha} = \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right],$$

$$N_{\beta\beta} = \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right],$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = -\frac{1}{AB} \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right],$$

$$Q_\alpha = -D \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\nabla^2 w) \right],$$

$$Q_\beta = -D \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (\nabla^2 w) \right],$$

\* For more detail on the differential geometry of the surface, see "Differential Geometry of Three Dimensions" by C. E. Weatherburn, Cambridge at The University Press, 1955.



$$\begin{aligned}
M_{\alpha\alpha} &= -D \left\{ \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right] + \nu \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right] \right\}, \\
M_{\beta\beta} &= -D \left\{ \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right] + \nu \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right] \right\}, \\
M_{\alpha\beta} &= M_{\beta\alpha} = -D (1 - \nu) \left\{ \frac{1}{A B} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

It seems convenient to introduce a complex function of the form

$$V = w + i \omega \Phi,$$

where  $\omega$  designates as yet unknown constant and  $i = \sqrt{-1}$ .

Multiplying the first equation of (1) by  $i \omega$  and adding the resulting expression to the second equation of (1) yields

$$\begin{aligned}
&V^4 (w + i \omega \Phi) - \bar{V}^2 \left( i \omega E h w - \frac{1}{D} \Phi \right) = \\
&= \frac{p_n}{D} - \frac{\Gamma}{D} \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right) - (1 - \nu) i \omega V^2 \Gamma - E h i \omega V^2 (\gamma T).
\end{aligned}$$

On the left side of this equation the first term already has the desired dependent variable, but the second term's dependent variable is not the desirable one. As  $\omega$  in that relation is yet a free constant, the desired form of dependent variable is imposed, hence

$$\bar{V}^2 \left( i \omega E h w - \frac{1}{D} \Phi \right) = i \omega E h \bar{V}^2 \left( w + \frac{i}{E h D \omega} \Phi \right).$$

Now

$$w + \frac{i}{E h D \omega} \Phi = w + i \omega \Phi.$$

In order that the two complex quantities can be equalities, both their real and imaginary parts have to be equalities.

The real parts are already equalities. The imaginary parts have to yield to the equation

$$\frac{i}{E h \omega D} \Phi = i \omega \Phi.$$

Rearranging

$$\omega^2 = \frac{1}{E h D}$$

or

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{E h D}} = \frac{\sqrt{12 (1 - \nu^2)}}{E h^2}.$$

The complex shell equation can finally be expressed by

$$\begin{aligned}
&V^4 V - i \left( \frac{\sqrt{12 (1 - \nu^2)}}{h} \right) \bar{V}^2 V = \\
&= \frac{p_n}{D} - \frac{\Gamma}{D} \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right) - i \frac{\sqrt{12 (1 - \nu^2)}}{E h^2} V^2 [(1 - \nu) \Gamma + E h (\gamma T)].
\end{aligned} \tag{2}$$

For shallow shells the first order fundamental magnitudes of its middle surface behave almost as constants<sup>3</sup>, i. e.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A w) \approx A \frac{\partial w}{\partial \alpha}.$$

Consequently it is feasible to propose absolute coordinates

$$A \approx B \approx 1$$

and

$$\alpha = \xi,$$

$$\beta = \eta.$$

The differential operators become simply

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

and

$$\bar{\nabla}^2 \equiv \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] = \frac{1}{R} \nabla^2.$$

A tacit assumption was made that the radius

$$R_\eta = R_\xi (1 + \mu + \mu^2 + \dots),$$

where

$$|\mu| \ll 1.$$

Then it follows that for all practical purposes

$$\frac{1}{R_\eta} \approx \frac{1}{R_\xi} = \frac{1}{R}.$$

In addition for shallow shells the tractional surface loads  $p_\xi$  and  $p_\eta$  are insignificant under normal conditions in structural practice and, therefore, can be neglected in the analysis.

When all these arguments are taken into consideration equation (2) simplifies to

$$\nabla^2 (\nabla^2 - i \lambda^2) V = \frac{p_n}{D} - i \lambda^2 (\gamma T), \quad (3)$$

where

$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{R h}.$$

The solution of (3) can be constructed from three part solutions

$$V = V_0 + V_1 + V_2,$$

where

$V_0$  represents the particular solution,  $V_1$  and  $V_2$  are extractable from equations

$$(\nabla^2 - i \lambda^2) V_1 = 0, \quad (4)$$

$$\nabla^2 V_2 = 0. \quad (5)$$

In conformity with the assumption that the thin translational shell persists essentially in a momentless state of stress and that its transverse bending is effectively restricted to a limited narrow zone lining the shell boundaries, the perturbation zone can be considered as a local disturbance of the primitive membrane state of stress. If there exists such a membrane state of stress, provided the transverse bending does not affect the equilibrium equations to a noticeable degree, then the solution of equation (5) may be dropped and the membrane solution used instead.

Hence the boundary perturbation is resigned to depend upon solution of equation (4) and the particular function.



## Complementary Function

Operational form of equation (4)

$$(\nabla^2 - i \lambda^2) V_1 = 0$$

is the representative of the expression

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - i \lambda^2 \right) V_1 = 0. \quad (6)$$

In analogy with ordinary differential equations the introduction of solution

$$V_1 = e^{a\xi + b\eta}$$

( $a$  and  $b$  are arbitrary constants), in equation (6) gives the condition

$$a^2 + b^2 - i \lambda^2 = 0$$

to be satisfied by  $a$  and  $b$ , hence

$$b = \sqrt{-a^2 + i \lambda^2}.$$

In view of the fact that the stress and strain patterns for the thin shells under consideration have 4-ply symmetry, the analysis henceforth is restricted to one side only ( $\eta = 0$ ). From a study of boundary conditions it can be determined that function  $V_1$  has to have periodicity with coordinate  $\xi$ .

Consequently

$$a = i c,$$

where  $c$  is a new arbitrary constant.

Then

$$b = \sqrt{c^2 + i \lambda^2} = \pm [A + i \Theta],$$

where

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c^4 + \lambda^4} + c^2}$$

and

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c^4 + \lambda^4} - c^2}.$$

Then the solution of (6) is

$$V_1 = A e^{[i c \xi + (A + i \Theta) \eta]} + B e^{[i c \xi - (A + i \Theta) \eta]}. \quad (7)$$

## Particular Solution

In the process of extracting the particular solution, equations (1) can be integrated to

$$\nabla^2 \Phi_p = \frac{E h}{R} w_p - E h (\gamma T)$$

and

$$\nabla^4 w_p + \frac{1}{R D} \nabla^2 \Phi_p = \frac{p_n}{D}.$$

A simple form of particular stress function that satisfies both equations above is

$$\Phi_p = p_n R \eta^2 / 2$$

and the particular normal displacement function becomes

$$w_p = p_n R / E h + R (\gamma T).$$

## General Solution

In the spirit of inspiration that the transverse bending of thin translational shells is restricted to a relatively narrow zone around its boundary, only that part of solution (7) is retained which decreases with increasing coordinate normal to the boundary under consideration.

Enforcement of this concept in solution (7) yields an approximate function

$$V_1 = w_c + i \omega \Phi_c = e^{-A \eta} \{ (C_1 + i C_2) (\cos \Theta \eta - i \sin \Theta \eta) \} \sin c \xi.$$

After decomposing this solution into real and imaginary parts and then equating the real and imaginary parts on both sides of the equation, both the complementary stress function

$$\Phi_c = \frac{E h^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \{ e^{-A \eta} [C_2 \cos \Theta \eta - C_1 \sin \Theta \eta] \} \sin c \xi$$

and the complementary normal displacement function

$$w_c = e^{-A \eta} [C_1 \cos \Theta \eta + C_2 \sin \Theta \eta] \sin c \xi$$

are obtained.

The general solution is the sum of complementary function and particular solution, hence

$$\Phi = \frac{E h^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \{ e^{-A \eta} [C_2 \cos \Theta \eta - C_1 \sin \Theta \eta] \sin c \xi + \frac{p_n R \eta^2}{2} \} \quad (8)$$

and

$$w = e^{-A \eta} [C_1 \cos \Theta \eta + C_2 \sin \Theta \eta] \sin c \xi + \frac{p_n R^2}{E h} + R (\gamma T). \quad (9)$$

## Stress Resultants and Stress Couples

Finally all sectional quantities can be expressed in absolute coordinates  $\xi$  and  $\eta$ :

$$\left. \begin{aligned} N_{\xi\xi} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}, \\ N_{\eta\eta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}, \\ Q_\xi &= -D \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (V^2 w) \right], \\ Q_\eta &= -D \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (V^2 w) \right], \\ M_{\xi\xi} &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right], \\ M_{\eta\eta} &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right], \\ M_{\xi\eta} = M_{\eta\xi} &= -D (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right], \\ F_\xi &\approx Q_\xi + \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta}, \\ F_\eta &\approx Q_\eta + \frac{\partial M_{\eta\xi}}{\partial \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$F_\xi$  and  $F_\eta$  designate approximate reactions acting along the edges  $\xi = 0$  and  $\eta = 0$  respectively.

## Boundary Conditions

As dictated by the limitations of the imposed conditions on the behavior of the thin translational shell all boundary conditions involving stress resultants, that act in the middle surface of the shell, are satisfied by the membrane solution not



covered in this paper\*. The boundary conditions which involve stress couples, edge rotations and edge displacements are to be satisfied by the transverse bending solution presented in this paper. The assumption is made that in general the effect of membrane stresses on transverse bending and the effect of transverse bending on the membrane state of stress is insignificant.

When it comes to the imposition of proper mathematical boundary conditions on shells of translation the stress analyst finds himself in a rather uneasy quandary. The standard practice in the design of supporting members for such shells has been to provide them with boundary arches that possess relatively small lateral restraining capacity. Yet in the proximity of the corners the capacity of the boundary restraint increases considerably.

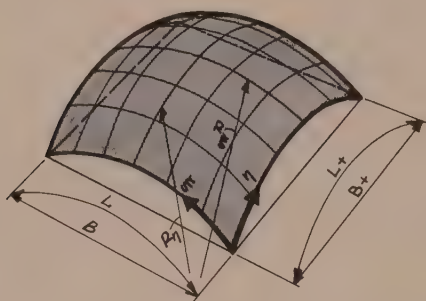


Fig. 2. Geometry of a Translational Surface over an Almost Square Base



Fig. 3. Twin Translational Thin Shallow Shell's

A consequence of this edge behavior manifests itself in boundary conditions that are functions of the arch coordinate.

An attempt to specify and satisfy such boundary conditions would be extremely complicated and practically untenable. Observations on the behavior of actual translational shell structures have indicated that the boundary conditions exhibit an almost constant characteristic all along the length of boundary arches and that marked variations appear only in the immediate vicinity of the corner of the shell. Therefore for practical purposes constant boundary conditions are considered adequate to describe the average condition of the shell's edges.

The following complete boundary conditions seem reasonable for the thin shell of translation shown in Fig. 2:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{At } \xi = 0, L: \quad & w = 0, \quad (a) \\
 & M_{\xi\xi} = 0, \quad (b) \\
 & N_{\xi\xi} = 0, \quad (c) \\
 & \varepsilon_{\eta} = 0, \quad (d) \\
 \text{At } \eta = 0: \quad & w = 0, \quad (e) \\
 & M_{\eta\eta} = 0, \quad (f) \\
 & N_{\eta\eta} = 0, \quad (g) \\
 & \varepsilon_{\xi} = 0, \quad (h)
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

where  $\varepsilon_{\eta}$  and  $\varepsilon_{\xi}$  designate strains along the coordinates  $\eta$  and  $\xi$  respectively.

\* For membrane (momentless) solution see 1, 2, 6, 14, 17, 18 and 19.

In case of shells shown in Fig. 3 the boundary conditions have to be modified as follows:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{At } \xi = 0, L: & \left. \begin{array}{l} w = 0, \quad (a) \\ M_{\xi\xi} = 0, \quad (b) \\ N_{\xi\xi} = 0, \quad (c) \\ \varepsilon_\eta = 0. \quad (d) \end{array} \right\} \\ \text{At } \eta = 0: & \left. \begin{array}{l} w = 0, \quad (e) \\ \frac{dw}{d\eta} = 0, \quad (f) \\ N_{\eta\eta} = 0, \quad (g) \\ \varepsilon_\xi = 0. \quad (h) \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (12)$$

Consistent with the basic assumptions, made at the outset of this treatment, boundary conditions (12 c) and (12 g) are handled by the membrane solution<sup>1, 2, 6, 14, 17, 18, 19, 21</sup>. Conditions (12 d) and (12 h) are satisfied rigorously only when exact solutions, corresponding to functional satisfaction of equations (4) and (5), are applied to the shell problem.

Hence in the present treatment of edge restraint only the boundary conditions (11 a), (11 b), (11 e), (11 f), (12 a), (12 b), (12 e) and (12 f) are pertinent.

A consideration of boundary conditions (11 a), (11 b), (12 a) and (12 b) requires

$$c = (2k + 1)\pi/L.$$

For the further analysis particular solutions are expanded into Fourier sine series in variable  $\xi$ . Solutions (8) and (9) can be expressed by

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{E h^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ e^{-A_k \eta} [C_k^2 \cos \Theta_k \eta - C_k^1 \sin \Theta_k \eta] + \right. \\ & \left. + p_n \frac{2R}{(2k+1)\pi} \eta^2 \right\} \sin \frac{(2k+1)\pi}{L} \xi \end{aligned} \quad (13)$$

and

$$\begin{aligned} w = & \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ e^{-A_k \eta} [C_k^1 \cos \Theta_k \eta + C_k^2 \sin \Theta_k \eta] + \right. \\ & \left. + \frac{4}{(2k+1)\pi} \left[ \frac{p_n R^2}{E h} + R(\gamma T) \right] \right\} \sin \frac{(2k+1)\pi}{L} \xi, \end{aligned} \quad (14)$$

where

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\frac{(2k+1)^4 \pi^4}{L^4} + \lambda^4} + \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{L^2}}, \\ \Theta_k &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\frac{(2k+1)^4 \pi^4}{L^4} + \lambda^4} - \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{L^2}}. \end{aligned}$$

Boundary conditions (11 e) and (11 f) are satisfied by

$$C_k^1 = -\frac{4}{\pi(2k+1)} \left[ \frac{p_n R^2}{E h} + R(\gamma T) \right] \quad (15)$$

and

$$C_k^2 = -\frac{4\pi(2k+1)}{\lambda^2 L^2} \left[ \frac{p_n R^2}{E h} + R(\gamma T) \right]. \quad (16)$$



Boundary conditions (12 e) and (12 f) are satisfied by

$$C_k^1 = -\frac{4}{\pi(2k+1)} \left[ \frac{p_n R^2}{E h} + R(\gamma T) \right] \quad (15)$$

and

$$C_k^2 = -\frac{4}{\pi(2k+1)} \frac{A_k}{\Theta_k} \left[ \frac{p_n R^2}{E h} + R(\gamma T) \right]. \quad (17)$$

For any particular translational shell the integration constants  $C_k^1$ ,  $C_k^2$  are calculated from (15), (16) or (15), (17) depending upon the nature of its edge support. These values are substituted in (14), which represents the normal displacement of the translational shell brought about by the boundary restraints.

As stipulated by the basic assumptions no use is made here of the stress function (13). The stress resultants that act in the plane of the shells surface are all given by the membrane solution. The limited effect perpetrated by the transverse bending upon these stress resultants is neglected.

All the sectional quantities in (10), that depend on normal displacement function  $w$ , are easily computed by means of solution (14).

### Application

For a thin reinforced concrete shell of translation (Fig. 2), enclosing a square base with sides  $B$ , the following design data is given:

$$R = 100 \text{ ft.},$$

$$L = 105 \text{ ft.},$$

$$h = 0.5 \text{ ft.},$$

$$\nu = 0.16,$$

$$p_n = -0.15 \text{ k. p. ft.}^2 \text{ (k. = kilo pound = 1000 lbs.)},$$

$$B = 100 \text{ ft.}$$

If the normal displacement function (14) is limited to four term series, then

$$\begin{aligned} w = \sum_{k=0}^{k=3} \left\{ e^{-A_k \eta} [C_k^1 \cos \Theta_k \eta + C_k^2 \sin \Theta_k \eta] + \frac{4}{(2k+1)\pi} \left[ \frac{p_n R^2}{E h} \right] \right\} \sin \frac{(2k+1)\pi}{L} \xi = \\ = \left\{ e^{-A_0 \eta} [C_0^1 \cos \Theta_0 \eta + C_0^2 \sin \Theta_0 \eta] + \frac{4}{\pi} \left[ \frac{p_n R^2}{E h} \right] \right\} \sin \frac{\pi}{L} \xi + \\ + \left\{ e^{-A_1 \eta} [C_1^1 \cos \Theta_1 \eta + C_1^2 \sin \Theta_1 \eta] + \frac{4}{3\pi} \left[ \frac{p_n R^2}{E h} \right] \right\} \sin \frac{3\pi}{L} \xi + \\ + \left\{ e^{-A_2 \eta} [C_2^1 \cos \Theta_2 \eta + C_2^2 \sin \Theta_2 \eta] + \frac{4}{5\pi} \left[ \frac{p_n R^2}{E h} \right] \right\} \sin \frac{5\pi}{L} \xi + \\ + \left\{ e^{-A_3 \eta} [C_3^1 \cos \Theta_3 \eta + C_3^2 \sin \Theta_3 \eta] + \frac{4}{7\pi} \left[ \frac{p_n R^2}{E h} \right] \right\} \sin \frac{7\pi}{L} \xi. \end{aligned}$$

The stress couple acting normal to the shell's boundary is

$$\begin{aligned} M_{\eta\eta} = -D \sum_{k=0}^{k=3} \left\{ e^{-A_k \eta} \left[ C_k^1 \left[ (1-\nu) \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{L^2} \cos \Theta_k \eta + \lambda^2 \sin \Theta_k \eta \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + C_k^2 \left[ -\lambda^2 \cos \Theta_k \eta + (1-\nu^2) \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{L^2} \sin \Theta_k \eta \right] \right] - \right. \\ \left. - \nu \frac{4(2k+1)\pi}{L^2} \frac{p_n R^2}{E h} \right\} \sin \frac{(2k+1)\pi}{L} \xi. \quad (18) \end{aligned}$$

The boundary reaction is given by

$$F_{\eta} = D \sum_{k=0}^{k=3} e^{-A_k \eta} \left\{ C_k^1 \left[ \left( A_k^3 - 3 A_k \Theta_k^2 - (2 - \nu) A_k \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{L^2} \right) \cos \Theta_k \eta - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \Theta_k^3 - 3 A_k^2 \Theta_k + (2 - \nu) \Theta_k \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{L^2} \right) \sin \Theta_k \eta \right] + \right. \\ \left. + C_k^2 \left[ \left( \Theta_k^3 - 3 A_k^2 \Theta_k + (2 - \nu) \Theta_k \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{L^2} \right) \cos \Theta_k \eta + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( A_k^3 - 3 A_k \Theta_k^2 - (2 - \nu) A_k \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{L^2} \right) \sin \Theta_k \eta \right] \right\} \sin \frac{(2k+1)\pi}{L} \xi. \quad (19)$$

The supporting arches of the thin shell are assumed to offer no resistance against lateral rotation.

The proper integration constants are obtained from (15) and (16), hence

$$C_k^1 = 3820 / (2k+1) E \quad \text{and} \quad C_k^2 = (50.5) (2k+1) / E.$$

Substitution of these constants in (18) yields the stress couple  $M_{\eta\eta}$ . The calculated stress couple distribution along the coordinate  $\eta$  at  $\xi = L/2$ ,  $\xi = L/4$  and  $\xi = L/8$  is depicted in Fig. 4.

If more terms of the series were used in the solution, the variation of stress couples with the coordinate  $\xi$  would have been further reduced.

This example demonstrates that the boundary perturbation can be treated approximately as being independent of the coordinate parallel to the edge of the shell under consideration, except in the immediate proximity of the intersecting arches. It is also evident from the stress couple diagram that the initial assumption of a narrow transverse bending zone around the translational shell's boundary was a reasonable one.

Furthermore, the boundary reaction  $F_{\eta}$ , obtainable from (19), gives that part of the surface load which is transmitted to the boundary supports by transverse stress resultant  $Q_{\eta}$ .

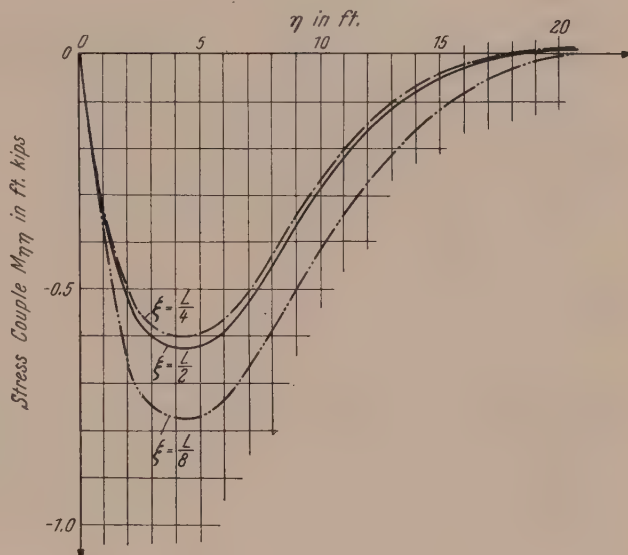


Fig. 4. Diagram of Stress Couple  $M_{\eta\eta}$

### Acknowledgment

Author is indebted to Dr. Warren Y. Yee, Head of the Structural Department of Smith, Hinchman & Grylls Associates, Inc., for the help given in the preparation of this paper and to his wife Virve for carrying out the numerical analysis in the sample problem.

### Bibliography

- <sup>1</sup> Csonka, P.: Results on Shells of Translation. *Acta Tech. Acad. Sci. Hung.*, Budapest **10**, No. 1/2, 59 (1955).
- <sup>2</sup> Csonka, P.: Special Kind of Shells of Translation with Two Vertical Planes of Symmetry. *Acta Tech. Acad. Sci. Hung.*, Budapest **11**, No. 1/2, 231 (1955).
- <sup>3</sup> Goldenveizer, A. L.: *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek*. (Theory of Elastic Thin Shells.) Gosudarstvennoe Izdatelstvo Tekhniko — Teoreticheskoy Literatury, Moscow, 1953.



- <sup>4</sup> Goldenveizer, A. L., A. K. Mroshchinskii and Y. B. Repman: *Metody rascheta sfericheskikh kupulov po besmomentnoy teorii.* (A Method of Calculation for the Momentless Theory of Spherical Shells.) *Plastinki i Obolochki*, Moscow: Gosstroyizdat, 1939.
- <sup>5</sup> Green, A. E. and W. Zerna: *Theoretical Elasticity.* Oxford at the Clarendon Press, 1954.
- <sup>6</sup> Hruban, K.: *Biegetheorie der Translationsflächen und ihre Anwendung im Hallenbau.* (Bending Theory of Translational Surfaces and Their Application in Arena Structures.) *Acta Tech. Acad. Sci. Hung.*, Budapest **7**, 425 (1953).
- <sup>7</sup> Kolosov, G. V.: *On an Application of the Theory of Functions of a Complex Variable to a Planar Problem in the Mathematical Theory of Elasticity.* Doctorates Dissertation, University of Tartu (Dorpat), Estonia, 1909.
- <sup>8</sup> Marguerre, K.: *Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung.* (On the Theory of the Curved Plate with Large Deformation.) *Proc. 5th Int. Congress Appl. Mech.*, p. 93, 1938.
- <sup>9</sup> Mushtari, A. H.: *Nekotorye obobshcheniya teorii tonkikh obolochek.* (Several Generalizations in the Theory of Thin Shells.) *Izvestiya Fiziko-Matematicheskovo obshchestva pri Kazanskom Universitete* **11**, Series 8 (1938).
- <sup>10</sup> Naghdi, P. M.: *On the Theory of Thin Elastic Shells, Part I and II.* *Tech. Reps. Nos. 1 and 2*, Eng. Res. Inst., Univ. of Michigan, 1955.
- <sup>11</sup> Nazarov, A. A.: *K teorii tonkikh plogikh obolochek.* (On the Theory of Thin Shallow Shells.) *Prikl. Mat. i Mekh.* **13**, 547 (1949).
- <sup>12</sup> Novoshilov, V. V.: *Novyi metod rascheta tonkikh obolochek.* (New Method of Calculation for Thin Shells.) *Izvestiya OTH No. 1* (1946).
- <sup>13</sup> Novoshilov, V. V.: *Teoriya tonkikh obolochek.* (Theory of Thin Shells.) *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Sudostroitel'noy Literatury*, Leningrad, 1951.
- <sup>14</sup> Parme, A. L.: *Hyperbolic Paraboloids and Other Shells of Double Curvature.* *J. Struct. Div., Proc. A. S. C. E.* **82**, ST 5, Sept., No. 1057 (1956).
- <sup>15</sup> Reissner, E.: *Stresses and Small Displacements of Shallow Spherical Shells, II.* *J. Math. Physics* **25**, No. 4, 279 (Jan. 1947).
- <sup>16</sup> Reissner, E.: *On Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells.* *J. Boston Soc. of Civil Engrs.* **42**, 100 (1955).
- <sup>17</sup> Salvadori, M. G.: *Analysis and Testing of Translational Shells.* *J. A. C. I.* **27**, No. 10, 1099 (June 1956).
- <sup>18</sup> Tügl, E.: *Membranspannungszustand im elliptischen Paraboloid.* (Membrane State of Stress in Elliptical Paraboloid.) *Österr. Ing.-Arch.* **10**, 308 (1956).
- <sup>19</sup> Tügl, E.: *Elliptisches Paraboloid über rechteckigem Grundriß.* (Elliptical Paraboloid over Rectangular Base.) *Österr. Bau-Z.* **11** (1956).
- <sup>20</sup> Vlasov, V. Z.: *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozheniya v tekhnike.* (General Theory of Shells and Its Application in Technology.) *Gostehizdat*, Moscow, 1949.
- <sup>21</sup> Zerna, W.: *Berechnung von Translationsschalen.* (Calculation of Translational Shells.) *Österr. Ing.-Arch.* **7**, 181 (1953).

(Eingegangen am 15. Oktober 1957)

## Über Stabilitätsuntersuchungen mit Hilfe des Verfahrens der „harmonischen Balance“

Von W. Peschka, Wien

Mit 6 Textabbildungen

Die Stabilität eines Systems ist durch sein Verhalten gegenüber einer beliebigen Störung definiert. Eine Störung bewirkt eine Änderung des ursprünglichen Zustandes des Systems. Bleibt diese Änderung beschränkt und verschwindet sie mit wachsender Zeit, so spricht man von Stabilität. Ist die bewirkte Änderung des ungestörten Zustandes jedoch nicht beschränkt, so spricht man von Instabilität.

Wenn nun der Betrag der Stör-Amplitude einer Systemgröße sehr klein gegen den Wert der ungestörten Systemgröße ist, wenn es sich also um „kleine Störungen“ handelt, dann kann die Frage, ob stabil oder instabil, relativ einfach beantwortet werden. Sind jedoch die äußeren Störungen groß gegenüber den ungestörten Werten, handelt es sich also um „große Störungen“, dann ist die Frage nach dem Verhalten des Systems „im großen“ viel schwerer zu beantworten. Eine Stabilitätsuntersuchung

geht bekanntlich folgendermaßen vor sich: Man stellt zuerst die Gleichungen auf, die das Verhalten eines Systems beschreiben. Dann untersucht man mit Hilfe dieser Systemgleichungen, ob eine Störung des ursprünglichen Systemzustandes zeitlich beschränkt bleibt oder nicht. Damit ist dann die Frage, ob stabil oder instabil, entschieden. Beschränkt man sich nun auf „kleine Störungen“, so erhält man für das weitere Verhalten der Störungen lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Dies ist eine große Vereinfachung gegenüber dem allgemeinen Fall, weil bei einem solchen System von Differentialgleichungen das Verhalten der Lösungen mit wachsender Zeit angegeben werden kann, ohne daß man die Lösungen zu kennen braucht. Es gibt hier verschiedene Kriterien, wie z. B. das bekannte Hurwitzsche Kriterium, das Nyquist-Kriterium, das „Aufsuchen der Wurzelorte“ usw. (vgl. <sup>1, 2</sup>).

Das Verhalten eines Systems „im kleinen“ kann also mit obigen Methoden beurteilt werden. Eine Beurteilung des Verhaltens „im großen“ ist viel schwieriger. Ist bei „kleinen Störungen“ das Verhalten des Systems von der Form der Störung unabhängig, so ist dies bei „großen Störungen“ nicht mehr der Fall. Man kann also beim Verhalten eines Systems „im großen“ streng genommen nur von Stabilität bzw. Instabilität gegenüber einem bestimmten Störungsverlauf sprechen. Für einen anderen Störungsverlauf muß dann die Stabilitätsuntersuchung von neuem gemacht werden.

Zu Stabilitätsuntersuchungen „im großen“ ist nun das Verfahren der „harmonischen Balance“ sehr gut geeignet. Es mögen zunächst die allgemeinen Gesichtspunkte kurz behandelt und dann einige Beispiele gebracht werden\*.

Die Gleichungen, die das Verhalten eines Systems beschreiben, können in folgender Form geschrieben werden (vgl. <sup>4, 5, 6</sup>):

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{v=1}^n a_{iv} x_v + \mu_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1)$$

Durch die Werte  $x_v$  wird der Zustand des Systems beschrieben. Die  $x_v$  können z. B. Schwingungsausschlag, Geschwindigkeit, Druck usw. sein,  $t$  bedeutet die Zeit,  $a_{iv}$  sind Koeffizienten, die Größen  $\mu_i$  Parameter und die Größen  $f_i$  sind Funktionen, die mindestens quadratisch sind. (Hat  $f_i$  noch einen linearen Anteil, so kann dieser zu  $a_{iv} x_v$  hinzugefügt werden.)

Wenn nun das System eine oszillatorische Instabilität besitzt, dann müssen an der Stabilitätsgrenze anhaltende Schwingungen auftreten. Das Gleichungssystem (1) muß also dort eine periodische Lösung besitzen, deren Grundwelle folgendermaßen lautet:

$$x_v = A_v \sin \Phi_v = A_v \kappa_v \sin \Phi_v \quad (2)$$

mit  $\Phi_v = \omega t + \varphi_v$ ,  $\omega$  als Frequenz,  $\varphi_v$  als Phasenwinkel und  $\kappa_v(\omega) = A_v/A$  als mit einer Normamplitude  $A$  gebildeten Amplitudenverhältnis.

Nun wird zu (1) ein lineares Ersatzsystem gesucht, das in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{v=1}^n \left( a_{iv}^* \frac{dx_v}{dt} + \bar{a}_{iv} x_v \right). \quad (3)$$

<sup>1</sup> W. Oppelt: Kleines Handbuch Technischer Regelvorgänge. Verlag Chemie. 1956.

<sup>2</sup> J. G. Truxal: Control System Synthesis. McGraw Hill. 1955.

\* Eine ausführliche Behandlung findet sich bei <sup>3-6</sup>.

<sup>3</sup> N. Krylow und N. Bogoljubow: Einführung in die nichtlineare Mechanik. Kiew. 1937. Auszugübersetzung Princeton, 1947.

<sup>4</sup> N. Minorsky: Introduction to non linear Mechanics. Ann Arbor: Edwards. 1947.

<sup>5</sup> K. Magnus: Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungen und Regelvorgänge. VDI-Forschungsheft 451.

<sup>6</sup> W. Hahn: Nichtlineare Regelvorgänge. Vorträge der Tagung in Darmstadt 1955. Oldenburg. 1956.



Die Koeffizienten  $a_{iv}^*$  und  $\bar{a}_{iv}$  bestimmen sich aus der Bedingung, daß die Grundharmonische einer nach Voraussetzung existierenden periodischen Lösung von (1) für jede Amplitude  $A_v$  mit der Lösung von (3) übereinstimmt.

Es sei nun vorausgesetzt, daß man die Funktionen  $f_i$  in Fourier-Reihen entwickeln kann. Es sollen nur die Glieder, die die Grundfrequenz enthalten, berücksichtigt werden.

Die Fourier-Entwicklung von  $f_i$  lautet dann:

$$f_i = a_{i1} \cos \Phi_1 + b_{i1} \sin \Phi_1 + \dots \quad (4)$$

mit den Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} a_{i1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(A \kappa_1 \sin \Phi_1, \dots, A \kappa_n \sin \Phi_n) \cos \Phi_1 d\Phi_1, \\ b_{i1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(A \kappa_1 \sin \Phi_1, \dots, A \kappa_n \sin \Phi_n) \sin \Phi_1 d\Phi_1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Als Grundharmonische der Funktionen  $f_i$  kann dabei die Schwingung der Variablen  $x_v$  genommen werden. Hier wurde die erste, also  $x_1$  gewählt.

Setzt man nun (5) und (4) in (1) ein, so erhält man:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{v=1}^n a_{iv} \cdot A \cdot \kappa_v \cdot \sin \Phi_v + \mu_i (a_{i1} \cos \Phi_1 + b_{i1} \sin \Phi_1), \quad (6)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{v=1}^n (a_{iv}^* \cdot A \cdot \kappa_v \cdot \omega \cdot \cos \Phi_v + \bar{a}_{iv} \cdot A \cdot \kappa_v \cdot \sin \Phi_v). \quad (7)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dann:

$$\bar{a}_{iv} = a_{iv} \quad \text{und} \quad a_{iv}^* = 0 \quad \text{für } v \neq 1,$$

ferner:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{i1} &= a_{i1} + \frac{\mu_i}{A \kappa_1} b_{i1}, \\ a_{i1}^* &= \frac{\mu_i}{A \kappa_1 \omega} a_{i1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

mit (5) erhält man daraus:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{i1} &= a_{i1} + \frac{\mu_i}{\pi A \kappa_1} \int_0^{2\pi} f_i(A \kappa_1 \sin \Phi_1, \dots, A \kappa_n \sin \Phi_n) \sin \Phi_1 d\Phi_1, \\ a_{i1}^* &= \frac{\mu_i}{\pi A \kappa_1 \omega} \int_0^{2\pi} f_i(A \kappa_1 \sin \Phi_1, \dots, A \kappa_n \sin \Phi_n) \cos \Phi_1 d\Phi_1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Das Verfahren der harmonischen Balance beruht also, wie schon erwähnt, auf der Einführung eines linearen Ersatzsystems (3) für das nichtlineare Ausgangssystem (1).

Es bestehen jedoch zwei wesentliche Unterschiede gegenüber der Methode der kleinen Schwingungen: Die Koeffizienten  $\bar{a}$  und  $a^*$  sind nicht mehr konstant, sondern Funktionen von  $A$ .

Ferner tritt auf der rechten Seite von Gl. (3) noch die zeitliche Ableitung der Veränderlichen  $x_v$  auf. Dadurch wird die Anwendung des Verfahrens der harmonischen Balance auch bei Funktionen  $f_i$ , die vom Hysteresetyp sind, möglich (vgl. <sup>5</sup>). Das Verhalten der Lösungen des linearen Ersatzsystems (3) kann nun mit Hilfe derselben Verfahren, die für die Stabilitätsuntersuchung bei kleinen Störungen entwickelt wurden, diskutiert werden<sup>5</sup>.

**Stabilitätsgrenze:** Zunächst ist die Stabilitätsgrenze selbst von Bedeutung. Man benötigt bekanntlich hierzu zunächst die Säkulargleichung oder auch charakteristische Gleichung genannt, die aus (3) mit Hilfe des Lösungsansatzes  $e^{\lambda x}$  folgt:

$$|\bar{a}_{iv} + a_{iv}^* \cdot \lambda - \delta_{iv} \lambda| = \sum_{v=0}^n c_{n-v} \cdot \lambda^v = 0. \quad (10)$$

$\lambda$  sind hierbei die Exponenten des Lösungsansatzes — die im allgemeinen komplex sind —,  $\delta_{iv}$  ist das Kroneckersche Symbol. Die Stabilität der Lösungen von (3) ist nun gesichert, wenn die Koeffizienten  $c$  der charakteristischen Gleichung untereinander gleiches Vorzeichen haben, und die  $n$  Hurwitz-Determinanten  $H_v$  positiv sind. Ist  $c_0 = 1$ , was durch Division mit  $\lambda^n$  in (10) stets erreicht werden kann, dann sind die Bedingungen  $c_n > 0$  und  $H_{n-1} > 0$  die schärfsten. Diese Bedingungen bestimmen also den Stabilitätsbereich<sup>5</sup>. Dabei besitzt die charakteristische Gl. (10) an der Grenze  $H_{n-1} = 0$  ein imaginäres Wurzelpaar, an der Grenze  $c_n = 0$  eine Nullwurzel. Es sind also im ersten Fall ungedämpfte Schwingungen möglich, während im zweiten Fall das System aperiodisch aus einer gegebenen Lage abwandert. Der Fall  $c_n = 0$  soll jedoch aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen werden, da in diesem Fall das Verfahren der harmonischen Balance aus naheliegenden Gründen nicht mehr angewendet werden kann. Außerdem kommt dem Fall  $c_n = 0$  keine so große praktische Bedeutung zu, wie dem Fall  $H_{n-1} = 0$ , wo Schwingungen auftreten können. Im folgenden soll nur dieser Fall weiter untersucht werden. Die Frequenz der Schwingungen an der Stabilitätsgrenze kann leicht ermittelt werden<sup>1, 2, 5</sup>.

$$\omega^2 = \frac{c_n \cdot N_{n-3}}{H_{n-2}}, \quad \left. \begin{array}{l} n \geq 3, \\ H_0 = 1. \end{array} \right\} \quad (11)$$

Für  $n \leq 3$  sind die Ergebnisse noch einfacher:

$$\left. \begin{array}{ll} n = 2 & \omega^2 = \frac{c_2}{c_0}, \\ n = 3 & \omega^2 = \frac{c_3}{c_1} = \frac{c_2}{c_0}. \end{array} \right\} \quad (12)$$

**Stabilitätsuntersuchung:** Die Stabilitätsuntersuchung linearer Systeme geht nun in der Weise vor sich, indem man prüft, ob der Bildpunkt, der dem jeweiligen Zustand des Systems entspricht, innerhalb des Gebietes  $H_{n-1} > 0$  liegt oder nicht. Da das Ersatzsystem (3) im Grenzfall verschwindender Amplituden  $A = 0$  mit dem System identisch wird, das man mit der Methode der kleinen Störungen erhält, so ergibt sich also zunächst derselbe Bildpunkt wie beim Verfahren der kleinen Störungen. Die Koeffizienten  $a$  und  $a^*$  in (3) sind jedoch Funktionen der Amplitude  $A$  und der Bildpunkt wird mit wachsendem  $A$  auf einer Kurve wandern, die  $A$ -Kurve bezeichnet wird.

Aus der gegenseitigen Lage dieser  $A$ -Kurve und der Kurve (bzw. Fläche)  $H_{n-1} = 0$  ist es nun möglich, das Verhalten eines Systems im großen zu beurteilen. Man nennt dieses Verfahren deswegen auch  $A$ -Kurvenverfahren.

Die Eigenschaften eines solchen Systems, das im Parameterraum durch  $H_{n-1} = 0$  und eine  $A$ -Kurve dargestellt wird, mögen nun angeführt werden (entnommen aus<sup>5</sup>). Hierbei wird der Fall  $A = 0$  Verhalten im kleinen und der Fall  $A \rightarrow \infty$  Verhalten im großen genannt (s. Abb. 1).

1. Ist die  $A$ -Kurve für alle  $A$  im Stabilitätsbereich  $H_{n-1} > 0$ , dann ist das System stabil im großen wie im kleinen.

2. Das System ist instabil im großen wie im kleinen.

3. Das System führt stationäre Schwingungen mit der Amplitude  $A_3'$  aus.

4. Das System ist im kleinen stabil, im großen jedoch instabil.



5. Das System ist im kleinen stabil; erreicht die Stör-Amplitude den Wert  $A_5'$ , so wandert das System nach  $A_5''$  ab und führt dort mit dieser Amplitude stationäre Schwingungen aus.

6. Das System ist instabil im kleinen, führt an  $A_6'$  mit dieser Amplitude ungedämpfte Schwingungen aus und wird mit  $A \geq A_6''$  instabil im großen.

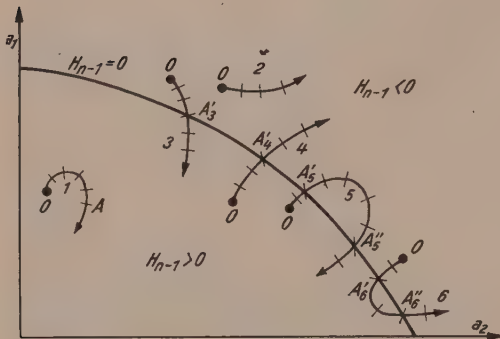


Abb. 1

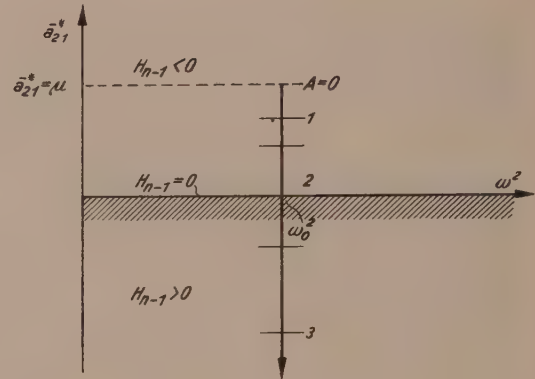


Abb. 2

## Anwendungen

### I. Röhrengenerator (entnommen aus <sup>5, 7</sup>)

Die zuständige Differentialgleichung ist die von van der Pol<sup>4, 7</sup>.

$$\ddot{z} - \mu(1 - z^2)\dot{z} + \omega^2 z = 0. \quad (13)$$

$z$  ist die Variable,  $\omega$  die Frequenz und  $\mu$  Parameter. Mit  $z_1 = z$  und  $z_2 = \dot{z}$  läßt sich (13) in der Form (1) schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\omega^2 z_1 + \mu(1 - z_1^2)z_2, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} x_1 &= A \sin \omega t, \\ x_2 &= A \omega \cos \omega t \end{aligned}$$

ergeben sich die Koeffizienten des Ersatzsystems:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{11} &= 0, \quad \bar{a}_{22} = 0, \quad a_{11}^* = a_{12}^* = a_{22}^* = 0, \quad \bar{a}_{12} = a_{12} = 1, \\ \bar{a}_{21} &= a_{21} + \frac{\mu}{\pi A} \int_0^{2\pi} (1 - A^2 \sin^2 \Phi) A \omega \cos \Phi \sin \Phi d\Phi = a_{21} = -\omega^2, \\ a_{21}^* &= \frac{\mu}{\pi A \omega} \int_0^{2\pi} (1 - A^2 \sin^2 \Phi) A \omega \cos \Phi \cos \Phi \cdot d\Phi = \mu \left(1 - \frac{A^2}{4}\right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Das lineare Ersatzsystem lautet somit:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\omega^2 z_1 + a_{21}^* z_1, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 - a_{21}^* \lambda + \omega^2 = 0 \quad (17)$$

<sup>7</sup> Van der Pol: On relaxation oscillations. Phil. Mag. 2 (1926).

und die Stabilitätsbedingungen sind:

$$c_2 = \omega^2 > 0, \quad c_1 = H_1 = -a_{21}^* > 0, \quad (18)$$

die erste ist hierbei stets erfüllt.

(18) kann in einer  $a_{21}^*, \omega^2$ -Ebene graphisch dargestellt werden (Abb. 2): Die  $A$ -Kurve ist eine Gerade und beginnt mit  $A = 0$  im Punkte  $a_{21}^* = \mu$  und  $\omega = \omega_0$ . Sie verläuft nach unten und trifft die Stabilitätsgrenze bei  $A' = 2$ , bei weiter ansteigendem  $A$  läuft die Kurve in das Innere des Stabilitätsbereiches hinein. Das System ist im kleinen instabil, im großen stabil. Der Arbeitspunkt ( $\omega_0, A = 2$ ) ist stabil und das System hat dort einen weichen Schwingungseinsatz (mit kleinen Amplituden beginnend) (Genauer s. <sup>5</sup>).

## II. Treibstofffördersystem eines Flüssigkeitsraketenmotors (Monopropellant)<sup>8</sup>

Die wichtigsten Bezeichnungen sind in Abb. 3 angeführt.

$p_k$  bedeutet den Brennkammerdruck,  $p_1$  den Druck unmittelbar nach der Pumpe  $P$ ,  $\dot{m}$  die Fördermenge in der Zeiteinheit,  $F$  ist der gesamte lichte Querschnitt der Treibstoffzuleitungen,  $l$  ihre mittlere Länge. Die Gleichungen für dieses System lauten dann in dimensionsloser Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} &= -\varphi + \mu, \\ \frac{d\mu}{dz} &= -\frac{1}{a}\varphi + \frac{1}{a}[f^*(1+\mu) - 1] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

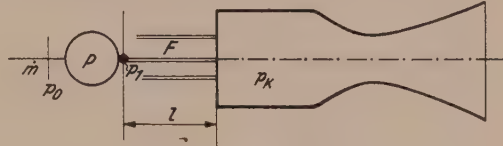


Abb. 3

mit:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{p_k - \bar{p}_k}{\bar{p}_k}, & \mu &= \frac{\dot{m} - \bar{\dot{m}}}{\bar{\dot{m}}}, & z &= \frac{t}{\vartheta_g}, \\ a &= \frac{\bar{\dot{m}} \cdot l}{\bar{p}_k F \vartheta_g}, & f^*(1+\mu) &= \frac{1}{\bar{p}_k} f(\dot{m}). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$p_k$  und  $\bar{\dot{m}}$  bedeuten die Stationärwerte von  $p_k$  und  $\dot{m}$ ,  $t$  ist die Zeit,  $\vartheta_g$  ist eine beliebige Bezugszeit (hier die mittlere Laufzeit eines Gaselements in der Brennkammer).  $f(\dot{m})$  ist die stationäre Pumpencharakteristik bei konstanter Drehzahl.

Das lineare Ersatzsystem lautet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} &= -\varphi + \mu, \\ a \frac{d\mu}{dz} &= -\varphi + a_{22}\mu. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$f^*(1+\mu)$  wird nun an der Stelle  $\mu = 0$  in eine Potenzreihe bis zu Gliedern vierter Ordnung entwickelt:

$$f(1+\mu) - 1 = a_1\mu + a_2\mu^2 + a_3\mu^3 + a_4\mu^4 + \dots \quad (22)$$

Der Ersatzkoeffizient  $a_{22}$  lautet dann mit Hilfe von Gl. (9):

$$a_{22} = \frac{1}{a}a_1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} [a_2 A^2 \sin^2 \Phi + a_3 A^3 \sin^3 \Phi + a_4 A^4 \sin^4 \Phi] \sin \Phi d\Phi, \quad (23)$$

$$a_{22} = \frac{1}{a}a_1 + \frac{3a_3}{4a}A^2; \quad (24)$$

<sup>8</sup> G. Heinrich und W. Peschka: Über Stabilitätsuntersuchungen an flüssigkeitsgetriebenen Raketenmotoren mit Hilfe des Verfahrens der Harmonischen Balance. Vorgetragen am VIII. Intern. Astronautischen Kongreß in Barcelona (6. bis 12. Okt. 1957). Kongreßbericht.





In dem durch die Kurven  $\Omega = 0$  begrenzten Gebiet können keine Schwingungen auftreten, während sonst überall Schwingungen möglich sind.

Zuletzt muß noch  $a_{22}$  durch  $a$  und  $A$  ausgedrückt werden, was mit Hilfe von (24) bereits getan wurde.

$$a_{22} = \frac{1}{a} a_1 + \frac{3}{4} \frac{a_3}{a} A^2. \quad (24)$$

Der Arbeitspunkt des Systems liegt also für  $A = 0$  an der Stelle  $\left(a_{22}, \frac{1}{a} a_1\right)$ . Mit wachsendem  $A$  wird er sich auf einer Kurve, der  $A$ -Kurve, bewegen. Die  $A$ -Kurve ist hier eine Gerade parallel zur Achse  $a_{22}$ .

Damit ist nun eine einfache Diskussion aller vorkommenden Fälle möglich (Abb. 4).

1.  $a_1 < 0, a_3 < 0$ .

a) Der Arbeitspunkt ist  $P_1^I$ .

Bei Zunahme von  $A$  geht  $a_{22} \rightarrow -\infty$ , bleibt also im Stabilitätsbereich. Das System ist im kleinen wie im großen stabil.

b) Der Arbeitspunkt ist  $P_4^I$  oder  $P_2^{II}$ .

Das System ist im kleinen stabil. Im großen führt es Schwingungen an den Punkten  $A_3^I$  oder  $A_2^{II}$  aus. Frequenz und Amplitude kann aus dem Diagramm entnommen werden.

2.  $a_1 > 0, a_3 > 0$ .

Ist  $\frac{1}{a} a_1 < 1$ , dann ist das System im kleinen stabil, im großen aber instabil, ist  $\frac{1}{a} a_1 > 1$ , dann ist das System im kleinen wie im großen instabil.

3.  $a_1 > 0, a_3 < 0$ .

Ist  $\frac{1}{a} a_1 < 1$ , dann ist das System im kleinen wie im großen stabil. Ist  $\frac{1}{a} a_1 > 1$ , dann tritt Fall 2 auf.

4.  $a_1 < 0, a_3 > 0$ : Das System ist im kleinen stabil, im großen jedoch instabil.

Das Stabilitätsdiagramm ist aber auch für Untersuchungen im kleinen geeignet, also für den Fall  $A \rightarrow 0$ . Die Stabilitätsbedingung lautet hier einfach nach (28):

$$\frac{1}{a} a_1 < 1 \quad \text{oder} \quad a_1 < a = \frac{\bar{m} \cdot l}{\dot{p}_k F \vartheta_g}. \quad (31)$$

Wird der Parameter  $l/F$  der Rohrleitung klein, dann reduziert sich im Falle  $l/F = 0$  Gl. (31) auf die Bedingung:

$$a_1 < 0. \quad (32)$$

Diese Bedingung ist von den Kreispumpen und Axialverdichtern her bekannt, wonach ein stabiler Betrieb im schraffierten Bereich in Abb. 5 nicht möglich ist. Aus Gl. (31) sieht man jedoch, daß die Rohrleitung stabilisierend wirkt.

Um also stabilen Betrieb zu erhalten, muß der Arbeitspunkt erstens einmal in einem Bereich liegen, wo  $a_1 < a$ . Dann ist das System im kleinen stabil (Fall 1 und 4). Nun hängt es ganz von  $a_3$ , also im wesentlichen von  $f^{*'''}$  (1), der dritten Ableitung der Pumpencharakteristik, ab, ob das System auch im großen stabil wird. Stabilität im großen ist vorhanden, wenn  $a_3 < 0$ . Ist jedoch  $a_3 > 0$ , dann ist das System im großen instabil.

Dieser Fall ist von besonderem Interesse: Wenn die Kennlinien der Treibstoffpumpen Parabeln sind — wie es bei Radialpumpen meist angenommen wird —, dann ist  $f^{*''' \equiv 0}$  und das System verhält sich dann im großen ebenso wie im kleinen.

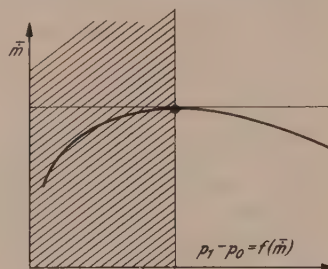


Abb. 5



Im allgemeinen treten aber stets Abweichungen von diesem Verhalten auf, und besonders bei Grenzleistungsverdichtern, wie sie gerade im Raketenbau vorkommen, ist es möglich, daß die Kennlinien Wendetangenten besitzen, und also zumindest die dritte Ableitung von Null verschieden ist.

Interessant ist übrigens, daß die geradzahligten Ableitungen der Kennlinie keinen direkten Einfluß auf die Stabilität besitzen.

Es können aber auch Abweichungen vom Parabelverlauf der Kennlinie auftreten, wenn die dynamische Kennlinie mit der statischen nicht mehr übereinstimmt. Deswegen wäre es nötig, dem Verlauf der dynamischen Kennlinie mehr Aufmerksamkeit zu widmen.

### III. Flüssigkeitsraketenmotor mit Totzeit in der Verbrennung und konstanter Treibstoffförderung<sup>1, 9, 8</sup>

Die Gleichungen des System reduzieren sich hier auf eine einzige (vgl. <sup>9</sup>).

$$\frac{d\varphi}{dz} + \varphi + 1 = \left[ \frac{1 + \varphi(z)}{1 + \varphi(z - \delta)} \right]^n \quad (32)$$

mit  $\delta = \frac{\tau}{\delta_g}$  [s. Gl. (20)].  $\tau$  ist hierbei die Totzeit.  $n$  ist ein Parameter.

Wenn der Treibstoff in die Brennkammer eingebracht wird, so benötigt er noch eine gewisse Zeit ( $\tau$ ), bis er ein brennfähiges Gemisch bildet und bis zur Zündtemperatur erwärmt ist. Dann setzt erst die Verbrennung ein. Diese Totzeit  $\tau$  kann nun Ursache einer oszillatorischen Instabilität eines Raketenmotors sein, wie zuerst L. Crocco gezeigt hat<sup>9</sup>. Diese Untersuchungen wurden von ihm jedoch nur mit der Methode der kleinen Schwingungen durchgeführt. In <sup>8</sup> wurden diese Untersuchungen verallgemeinert, indem auch große Störungen betrachtet wurden. Das Verfahren der harmonischen Balance hat sich hierbei sehr bewährt.

Das lineare Ersatzsystem zu (32) lautet:

$$\frac{d\varphi}{dz} + (1 - n)\varphi(z) + n \cdot \varphi(z - \delta) = a_{11}^* \frac{d\varphi}{dz} + \bar{a}_{11} \varphi(z), \quad (33)$$

die Ersatzkoeffizienten ergeben sich nach längerer Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{11} &= \frac{n A^2}{8} \{ (n-1)(n-2) - 2(2n^2-1) \cos \Omega \delta + n(n+1)(1+2 \cos^2 \Omega \delta) \}, \\ a_{11}^* &= \frac{n A^2}{8 \Omega} \{ 2(n^2+n+1) \sin \Omega \delta - (n+1)n \sin 2 \Omega \delta \}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Da sowohl in (32) als auch in (33) nicht nur die Funktionswerte an der Stelle  $z$ , sondern auch an der Stelle  $z - \delta$  vorkommen, ist dies keine gewöhnliche Differentialgleichung. Derartige Gleichungen nennt man Hysterodifferentialgleichungen<sup>10</sup>.

Gl. (33) geht in die Gleichung der linearisierten Theorie<sup>9</sup> über, wenn man  $A$  und damit  $a_{11}^*$  und  $\bar{a}_{11}$  gegen Null gehen läßt. Mit Hilfe von (33) und (34) kann nun wieder ein Stabilitätsdiagramm gefunden werden. Die numerischen Berechnungen erfordern jedoch einen enormen Aufwand an Arbeitszeit. Die Berechnung würde sich aber bei Verwendung einer programmgesteuerten elektronischen Rechenmaschine in relativ kurzer Zeit ausführen lassen.

Das Stabilitätsdiagramm für den Fall  $n = 0.75$  zeigt Abb. 6. Eine Diskussion der vorkommenden Fälle ist damit leicht durchführbar. Man sieht, daß z. B. für  $\delta = 0.25$  das System instabil ist, und da die Kurve  $\delta = 0.25$  die Stabilitätsgrenze

<sup>9</sup> L. Crocco: Aspects on Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors. Jet Prop. 1951/52, 6/1.

<sup>10</sup> N. Minorsky: Self Excited Oscillations in Dynamical Systems Possessing Retarded Actions. J. Appl. Mech. 9, Nr. 2 (1942).

schneidet, wird dort das System mit der zugehörigen Amplitude  $A$  Schwingungen ausführen, weil diese Kurve mit wachsendem  $A$  aus dem instabilen in den stabilen Bereich eintritt.

Die Frequenz kann an der  $\Omega \delta$ -Achse abgelesen werden.

Interessant ist, daß die Kurven  $\delta \leq 0,25$  die  $\Omega \delta$ -Achse nicht erreichen, das heißt, daß der Wert  $A = 0$  im großen in diesen Fällen nicht möglich ist. Dies deutet auf einen harten Schwingungseinsatz hin. Es kann nämlich das System im kleinen stabil sein, aber bei einer endlichen Störung setzt plötzlich eine Schwingung von endlicher Amplitude ein.

Die Annahme konstanter Treibstoffförderung ist allerdings eine starke Idealisierung. Auch die Elastizität der Rohrleitungen, die hier vernachlässigt wurde, kann noch Korrekturen zu obigen Ergebnissen liefern.

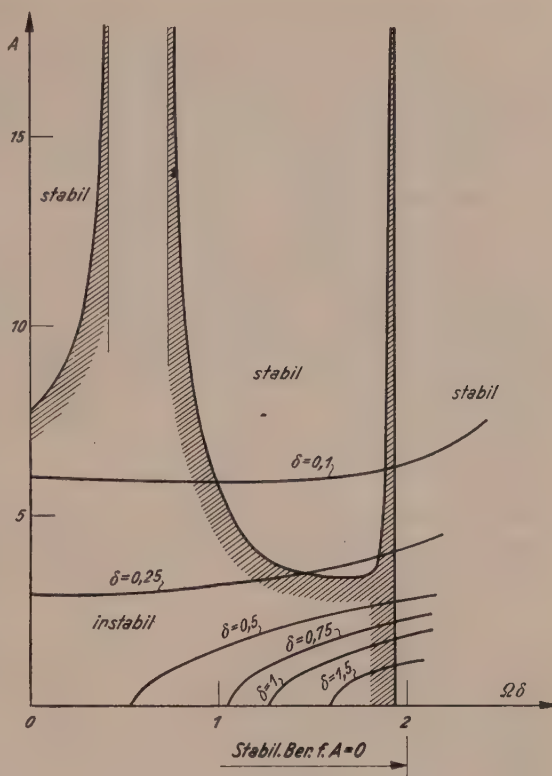


Abb. 6

### Nachtrag

In letzter Zeit ist eine weitere Arbeit von K. Magnus in der Z. f. angew. Math. Mech. (11/12, 1957) unter dem Titel „Über den Zusammenhang verschiedener Näherungsverfahren zur Berechnung nichtlinearer Schwingungen“ erschienen. Darin wird gezeigt, daß das Verfahren der Harmonischen Balance sowie auch andere Näherungsmethoden zur Berechnung nichtlinearer Schwingungen als Sonderfälle des allgemeinen Ritz-Galerkin-Verfahrens aufzufassen sind. Unter diesen Gesichtspunkten sind dann sogar noch allgemeinere Aussagen möglich. (Eingegangen am 21. November 1957)

Mitteilung aus dem Institut für Einführung in die Stark- und Schwachstromtechnik, Wien

## Über das Drehmoment im elektromagnetischen Feld

Von H. Hofmann

Erster Teil

### Elektrostatisches Feld

Mit 6 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Die in vielen neueren Arbeiten behandelte Frage des Drehmomentes im elektromagnetischen Feld, speziell im Falle anisotroper Materie, wird einer grundlegenden Untersuchung unterzogen. Es wird gezeigt, daß wegen der Polarität der Materie im elektromagnetischen Feld im Gegensatz zur Mechanik des Kontinuums unsymmetrische Spannungstensoren auftreten. Unter anderem erweist es sich auch, daß die Maxwell'schen Spannungen bei anisotroper Materie ihre Gültigkeit behalten, während zum Moment der Maxwell'schen ponderomotorischen Volumskräfte in diesem Fall noch ein Zusatzglied zu treten hat: Es ist das vektorielle Produkt aus Polarisations- und Feldvektor und stellt die Momentendichte der im Materieinneren an den polarisierten Volumselementen angreifenden Kräftepaare dar.

## I. Vorbemerkungen über die Schreibweise von Tensoren (Vektoren) und Formelzeichen

Im Zuge der Angleichung an bestehende, insbesondere an inzwischen neu erschienenene Normen erfolgt eine geringfügige Abänderung der Schreibweise gegenüber derjenigen, die in den bisherigen Veröffentlichungen des Verfassers angewendet wurde.

In der symbolischen Schreibweise der Tensoren (Vektoren) bedeutet jetzt

$\mathfrak{A} \mathfrak{B}$  statt  $(\mathfrak{A} \mathfrak{B})$  das skalare,  
 $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  statt  $[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$  das vektorielle,

$\mathfrak{A}; \mathfrak{B}$  statt  $\mathfrak{A} \mathfrak{B}$  das dyadische Produkt der beiden Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  (s. ÖNORM A 6411, DIN 1303, Ausgabe Juli 1946, und DIN 1303, Neuentwurf August 1957). Die Zusammenfassung von Summanden und Produkten erfolgt nur noch mit Hilfe der runden oder der geschlungenen Klammern, das Komma wird hierfür nicht mehr verwendet, also

$\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$  statt  $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B} + \mathfrak{C}]$ ,  
 $\mathfrak{A} \{ \mathfrak{B} (\mathfrak{C}; \mathfrak{D}) \}$  statt  $(\mathfrak{A} (\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \mathfrak{D}))$  usw.

Bei den Formelzeichen wird die Bezeichnung  $\mathfrak{M}$  für den magnetischen Polarisationsvektor in  $\mathfrak{J}$  abgeändert und für die Stromdichte der Großbuchstabe  $\mathfrak{G}$  an Stelle des Kleinbuchstabens  $g$  verwendet (s. ÖNORM A 6401).

## II. Der Kraftangriff des elektromagnetischen Feldes an der Materie

Die Differentialgleichungen für das elektromagnetische Feld beinhalten unmittelbar keine Aussage über den Kraftangriff des Feldes an der Materie und man muß daher zusätzlich irgendeine Annahme oder ein als allgemeingültig angesehenes Prinzip (Energieprinzip, Impulssatz oder anderes) heranziehen, um zu einer derartigen Aussage zu gelangen. Je nach der Art dieser Annahme erhält man verschiedene Ausdrücke für Kraftdichten, denen jeweils eine ganz spezielle physikalische Bedeutung zukommt. Eigenartigerweise wurden diese verschiedenen Bedeutungen bislang nicht immer entsprechend gewürdigt, so daß die praktische Anwendung der einzelnen Kraftdichten auf sich scheinbar widersprechende Resultate geführt hat. So errechnen Sommerfeld und Bopp in einer neueren Arbeit<sup>1</sup> für das Drehmoment auf einen Magneten, der sich in einer permeablen Flüssigkeit befindet, zwei verschiedene Resultate, die sich wie  $\mu_r : 1$  ( $\mu_r \dots$  relative Permeabilität der den Magneten umgebenden Flüssigkeit) verhalten. Sie empfehlen, ohne weiteren Versuch einer theoretischen Klärung, eine Entscheidung durch das Experiment. Über die Kraft oder das Drehmoment liegen unter anderem weitere neueste Arbeiten von Diesselhorst<sup>2,3</sup>, Döring<sup>4,5</sup> und Sommerfeld und Ramberg<sup>6</sup> vor. Über Unklarheiten im Zusammenhang mit den Kraft-, Energie- und Impulsgrößen des elektromagnetischen Feldes diskutiert ausführlich auch v. Laue in der neuesten Auflage seines Buches über die Relativitätstheorie<sup>7</sup> (1. Bd., § 19).

<sup>1</sup> A. Sommerfeld und F. Bopp: Zum Problem der Maxwell'schen Spannungen. Ann. Physik 8, H 1/2 (1950).

<sup>2</sup> H. Diesselhorst: Feldwirkungen in permeablen Medien und Definition des magnetischen Momentes. Ann. Physik 3 (1948).

<sup>3</sup> H. Diesselhorst: Magnetfeld und Drehmoment bei einem magnetischen Ellipsoid in permeablem Medium und Fremdfeld. Ann. Physik 9, H. 6/7 (1951).

<sup>4</sup> W. Döring: Zur Definition des magnetischen Momentes. Ann. Physik 6 (1949).

<sup>5</sup> W. Döring: Über die Kraft und das Drehmoment auf magnetisierte Körper im Magnetfeld. Ann. Physik 9, H 6/7 (1951).

<sup>6</sup> A. Sommerfeld und E. Ramberg: Das Drehmoment eines permanenten Magneten im Felde eines permeablen Mediums. Ann. Physik 8, H. 1/2 (1950).

<sup>7</sup> M. v. Laue: Die Relativitätstheorie, Bd. I, 6. Aufl. Vieweg u. Sohn. 1955.



Alle erwähnten Arbeiten sowie auch diejenigen des Verfassers behandeln das Problem des Kraftangriffes vom makrophysikalischen Standpunkt aus, das heißt unter Verwendung der Größen des Makrofeldes, wobei man sich diese allerdings durch Mittelwertbildung aus den Größen des Mikrobereiches entstanden denken kann. Die Ergebnisse setzen also die Annahme voraus, daß die Materie als Kontinuum aufgefaßt werden kann und sind damit, in gleicher Weise wie auch die gesamte Maxwell'sche Theorie, auf den Bereich der kontinuierlichen Darstellung beschränkt. Die praktische Anwendung insbesondere in der Elektrotechnik muß ihr Auslangen im Rahmen der Kontinuumstheorie mit den Größen des Makrofeldes finden und findet sie auch, doch sei an dieser Stelle darauf verwiesen, daß für Untersuchungen, die eine mikrophysikalische Behandlung benötigen, die Rechnung unter Verwendung der Größen des Makrofeldes bekanntlich nur eine mehr oder weniger grobe Näherung darstellen kann, mitunter versagen die Aussagen der Kontinuumstheorie auch vollends. Es wird im folgenden anläßlich der Besprechung der Polarisationsvektoren  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{J}$  nochmals auf die Bedeutung der kontinuierlichen Darstellung und ihre Grenzen eingegangen. Auch in der Mechanik arbeitet man vorwiegend und mit Erfolg kontinuumstheoretisch und die Parallelen zwischen dem Kraftangriff am mechanischen Kontinuum, speziell im Rahmen der Elastizitätstheorie, und an der kontinuierlich gedachten Materie im elektromagnetischen Feld treten immer wieder in Erscheinung. Ein Unterschied ist allerdings evident: In der Mechanik des Kontinuums gibt es nur homogen mit Masse erfüllte Volumenelemente, die sich allerdings nicht immer isotrop verhalten müssen. Im elektromagnetischen Feld erweist sich hingegen ein Volumenelement kontinuierlicher Materie nicht nur als homogen mit („wahrer“) Ladung und Leitungsstrom erfüllt, sondern es ist außerdem noch polarisiert. In Zusammenhang mit dieser Polarität, einer Erscheinung, die eben in der Mechanik des Kontinuums nicht auftritt, steht unter anderem die Tatsache, daß im Gegensatz etwa zum symmetrischen Spannungstensor der Elastizitätstheorie im elektromagnetischen Feld auch unsymmetrische Tensoren auftreten. Das polare Verhalten der Materie im elektromagnetischen Feld ist gleichsam der Schlüssel für das Verständnis dafür, daß die Parallelen mit der Mechanik des Kontinuums nicht vollkommen sein können, und es läßt sich zeigen, daß die immer wieder erhobene Forderung nach ausschließlich symmetrischen Tensoren im elektromagnetischen Feld vollkommen unberechtigt ist.

Die Behandlung des Kraftangriffes des elektromagnetischen Feldes an der Materie durch den Verfasser in <sup>8</sup>, <sup>9</sup>, <sup>10</sup>, <sup>11</sup> brachte verschiedene prinzipielle Ergebnisse, die auch für die Berechnung des Drehmomentes von Bedeutung sind. Sie sollen zunächst zusammengefaßt dargestellt werden:

#### A. Der Unterschied zwischen bewegender (ponderomotorischer) und direkter (körperfester) Kraft

Die Kraft, mit der ein Feld direkt (körperfest) an dem punktförmigen Träger einer Menge angreift, ist durch das Produkt „Menge mal Feldstärke“ definiert, also z. B. im elektrischen Feld durch das Produkt „Ladung mal elektrische Feldstärke“:

$$\mathfrak{F} = Q \cdot \mathfrak{E}. \quad (1)$$

<sup>8</sup> H. Hofmann: Über den Kraftangriff des stationären elektromagnetischen Feldes an der Materie. Österr. Ingenieur-Arch. **10**, H. 4 (1956).

<sup>9</sup> H. Hofmann: Über den Kraftangriff des Magnetfeldes an Elementarströmen. Österr. Ingenieur-Arch. **11**, H. 1 (1957).

<sup>10</sup> H. Hofmann: Die Behandlung von Sprungflächen beim Kraftangriff des stationären elektromagnetischen Feldes an der Materie. Österr. Ingenieur-Arch. **11**, H. 1 (1957).

<sup>11</sup> H. Hofmann: Über den Kraftangriff des allgemeinen, nichtstationären elektromagnetischen Feldes an der Materie. Österr. Ingenieur-Arch. **11**, H. 2 (1957).

Man wird vom räumlichen Ausmaß des Trägers der Menge unabhängig, wenn man zu dem allgemeineren Ausdruck mit Hilfe der Dichtegrößen übergeht, im elektrischen Feld somit auf

$$\mathfrak{f} = \varrho \cdot \mathfrak{E} \quad (2)$$

( $\mathfrak{f}$  ... Kraftdichte oder Volumskraft,  $\varrho$  ... Ladungsdichte). Die gesamte am Körper in seinem Volumen vom Felde angreifende Kraft ist dann durch das Integral

$$\mathfrak{F} = \int_V \mathfrak{f} dV = \int_V \varrho \mathfrak{E} dV \quad (3)$$

gegeben, wobei hier über die nähere Bedeutung der Größen Ladungsdichte  $\varrho$  und Feldstärke  $\mathfrak{E}$  zunächst noch nicht diskutiert werden soll.

Die meßbare, den Körper bewegende (wägbare, ponderomotorische) Kraft ist im allgemeinen Fall jedoch nicht identisch mit dieser am Körper in seinem Volumen direkt angreifenden Kraft des Feldes, da der Körper auch an seiner Oberfläche durch die umgebende Materie einwirkenden Kräften unterliegt. Sie werden ebenfalls durch das betreffende Feld, nämlich durch Einwirkung auf diese umgebende Materie, hervorgerufen. Im Gravitationsfeld ist für die Resultierende  $\mathfrak{P}$  dieser auf die Oberfläche  $A$  des Körpers ausgeübten Kräfte

$$\mathfrak{P} = \oint_A \mathfrak{p} dA \quad (4)$$

( $\mathfrak{p}$  ... Flächenkraft) der Ausdruck „Auftrieb“ gebräuchlich, der auch hier im elektromagnetischen Feld ohne weiteres im selben Sinn verwendet werden kann und soll. Die bewegende, ponderomotorische Kraft  $\mathfrak{F}_{\text{pond}}$  setzt sich also aus der körperfesten, im Volumen des Körpers direkt angreifenden Kraft  $\mathfrak{F}$  und dem vom Feld indirekt durch die umgebende Materie hervorgerufenen, an der Oberfläche angreifenden Auftrieb  $\mathfrak{P}$  gemäß

$$\mathfrak{F}_{\text{pond}} = \mathfrak{F} + \mathfrak{P} = \int_V \mathfrak{f} dV + \oint_A \mathfrak{p} dA \quad (5)$$

zusammen.

Es gelingt nun — sowohl im (stationären) Gravitationsfeld als auch im (stationären) elektromagnetischen Feld — die ponderomotorische Kraft Gl. (5) in ein Volumsintegral über den betrachteten Körper allein umzuwandeln (s. <sup>12</sup>, Abschn. II), dessen Integrand  $\mathfrak{f}_{\text{pond}}$  dann formal größenmäßig die Bedeutung einer Kraftdichte besitzt, physikalisch jedoch keineswegs als die an jedem Volumselement (je Volumseinheit) vom Felde tatsächlich angreifende Kraft gedeutet werden darf:

$$\mathfrak{F}_{\text{pond}} = \mathfrak{F} + \mathfrak{P} = \int_V \mathfrak{f} dV + \oint_A \mathfrak{p} dA = \int_V \mathfrak{f}_{\text{pond}} dV. \quad (6)$$

Diese formale ponderomotorische Volumskraft  $\mathfrak{f}_{\text{pond}}$  hat lediglich die Bedeutung, daß sie allein über das Volumen des Körpers integriert unmittelbar bereits die gesamte bewegende Kraft  $\mathfrak{F}_{\text{pond}}$ , die sich physikalisch gesehen ja aus der direkten, im Volumen angreifenden Kraft  $\mathfrak{F}$  und dem Auftrieb  $\mathfrak{P}$  gemäß Gl. (6) zusammensetzt, liefert. Man kann zur ponderomotorischen Kraftdichte auch über Energiebetrachtungen kommen: Es gelingt nämlich, die bei einer virtuellen Verschiebung  $\delta \mathfrak{s}$  verbrauchte Feldenergie —  $\delta W$ , die nach dem Energieprinzip gleich der gewonnenen mechanischen Arbeit  $\delta A$  sein muß, unter gewissen Voraussetzungen in ein Volumsintegral über den betrachteten Körper allein umzuwandeln:

$$- \delta W = + \delta A = \int_V \mathfrak{f}_{\text{pond}} \delta \mathfrak{s} dV. \quad (7)$$

Die auf diesem Wege erhaltene Ableitung zeigt, daß der mit der virtuellen Verschiebung  $\delta \mathfrak{s}$  multiplizierte Ausdruck  $\mathfrak{f}_{\text{pond}}$  eben wiederum nur einen formalen, mit dem

<sup>12</sup> S. Fußnote 8, S. 287.



Energieprinzip verträglichen Ausdruck für eine Kraftdichte darstellt, der die Wirkung der physikalisch deutbaren, im Volumen wirksamen direkten Kraftdichte  $\vec{f}$  und der an der Oberfläche angreifenden Flächenkraft  $\vec{p}$  in sich vereinigt.

In gleicher Weise muß zwischen dem Moment der körperfesten und dem Moment der ponderomotorischen Kräfte unterschieden werden. Zweckmäßigerweise übernimmt man dann die analogen Bezeichnungen „körperfestes (direktes) Drehmoment“ und „ponderomotorisches (bewegendes) Drehmoment“. Das körperfeste Drehmoment muß, vermehrt um das Moment der an der Oberfläche des betrachteten Körpers angreifenden Auftriebskräfte, wiederum das meßbare ponderomotorische Moment liefern.

Befindet sich ein Körper im Vakuum, so wird mangels an Auftriebskräften die Integration der körperfesten und der ponderomotorischen Volumskräfte unmittelbar auf dasselbe Resultat führen, was in <sup>13</sup> (Abschn. VIII) gezeigt wurde. Dieselbe Übereinstimmung besteht in einem solchen Fall auch für das körperfeste und das ponderomotorische Drehmoment, was noch später im Rahmen dieser Arbeit nachgewiesen werden soll.

Im elektromagnetischen Feld ist demnach streng zwischen den etwa aus dem Lorentz-Ansatz für die Kraftdichte im Mikrobereich

$$\vec{f} = \varrho^{(el)} \cdot \vec{e}^{(E)} + \frac{1}{c_0} \varrho^{(el)} \vec{v} \times \vec{h}^{(E)} \quad (8)$$

( $\vec{e}^{(E)}$ ,  $\vec{h}^{(E)}$  ... elektrische bzw. magnetische Feldstärke im Mikrobereich nach der Elektronentheorie) abgeleiteten körperfesten Volumskräften des Makrofeldes, die auf Produkte aus Mengendichten und Feldstärken zurückgehen, und den Maxwellschen ponderomotorischen Kräften zu unterscheiden. Der Lorentz-Ansatz Gl. (8) beschreibt ja nur den direkten Kraftangriff des Feldes an der Ladungsdichte  $\varrho^{(el)}$ , die aus dem Energieprinzip gewonnenen Maxwellschen ponderomotorischen Volumskräfte enthalten hingegen auch den Kraftangriff der den Körper umgebenden Materie, also den Einfluß der Auftriebskräfte. In <sup>15</sup> (Abschn. VIII, 3) wurde gezeigt, daß man bei zusätzlicher Berücksichtigung dieser Auftriebskräfte zu den aus dem Lorentz-Ansatz für das Makrofeld abgeleiteten körperfesten Kräften auf dasselbe Resultat für die bewegende Kraft des Feldes auf einen Körper gelangt wie direkt mit Hilfe der Maxwellschen ponderomotorischen Volumskräfte. Es sei an dieser Stelle vermerkt, daß diese Übereinstimmung der Resultate für die resultierende ponderomotorische Kraft auch bei ganz allgemeinem Zusammenhang zwischen  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$ , also auch bei anisotroper Materie, besteht.

## B. Die Bereichsabgrenzung polarisierter Materie

Die Mittelwertbildung der für den Mikrobereich gültigen Feldgleichungen führt auf die Beziehungen des Makrofeldes (s. etwa <sup>16</sup>, Abschn. 109, und <sup>17</sup>). Bei Anwesenheit von Materie bedeutet dann die Verwendung der elektromagnetischen Makrogrößen zwingend, daß man sich auf den Standpunkt der Kontinuumstheorie gestellt hat, was die Autoren in fast allen Fällen gar nicht mehr eigens betonen (s. die bereits erwähnten Arbeiten<sup>18</sup>), doch soll diese Tatsache, um allen Einwänden vorzubeugen, nochmals ausdrücklich an die Spitze dieser Erörterungen gestellt werden.

<sup>13</sup> S. Fußnote 8, S. 287.

<sup>14</sup> Es wird das Lorentzsche Maßsystem verwendet.

<sup>15</sup> S. Fußnote 8, S. 287.

<sup>16</sup> Cl. Schaefer: Einführung in die theoretische Physik, Bd. III/1. Berlin: de Gruyter u. Co. 1950.

<sup>17</sup> H. Hofmann: Über die Deutung der Maxwellschen Gleichungen mit Hilfe elektrischer und magnetischer Mengen. Acta Physica Austriaca 11, H. 2 (1957).

<sup>18</sup> S. die Fußnoten 1 bis 7, S. 286.



Die allzu formale Anwendung der Makrogrößen war nun mit ein Grund, daß über den Kraftangriff des elektromagnetischen Feldes an der Materie bislang so viele Unklarheiten und offene Fragen bestanden haben, und damit auch ein Anlaß für die erwähnten Untersuchungen des Verfassers<sup>19</sup>. Es sollen daher über die Anwendung und Bedeutung der Makrogrößen in der Materie auch jetzt im Rahmen der Untersuchungen über das Drehmoment nochmals die folgenden Tatsachen angeführt werden:

Der makroskopische Mittelwert der mikroskopischen elektrischen Ladungsdichte  $\varrho^{(\text{el})}$

$$\overline{\varrho^{(\text{el})}} = \varrho'^{(\text{el})} = \text{div } \mathfrak{E} = \text{div } (\mathfrak{D} - \mathfrak{P}) = \varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})} + \varrho_{\text{p}}^{(\text{el})} \quad (9)$$

stellt die resultierende, als Quellendichte des elektrischen Feldes in Erscheinung tretende Ladungsdichte dar und wird allgemein „freie“ elektrische Ladungsdichte genannt. Sie ist durch die algebraische Summe der durch Leitungsstrom zugeführten „wahren“ Ladungsdichte  $\varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})}$  und der durch Polarisation der Materie frei gewordenen Polarisationsladungsdichte  $\varrho_{\text{p}}^{(\text{el})}$  gegeben. Es soll nun ein beliebig abgegrenzter Bereich von Materie betrachtet und dabei zunächst vorausgesetzt werden, daß sich die Material- und Feldwerte stetig ändern. Sprünge dieser Werte werden also vorläufig ausgeschlossen oder zumindest durch schmale Schichten sehr steiler Änderung ersetzt. Die „freie“ Ladungsdichte

$\varrho'^{(\text{el})} = \varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})} + \varrho_{\text{p}}^{(\text{el})}$  im Inneren des Bereiches I führt nun allein noch nicht auf die Gesamtladung eines richtig abgegrenzten, physikalischen Körpers. Denkt man sich nämlich die Materie des Bereiches I entfernt, wobei sich aber an der

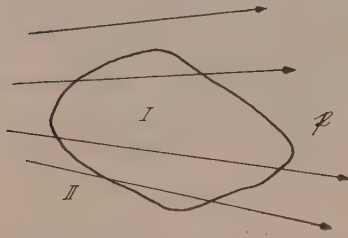


Abb. 1

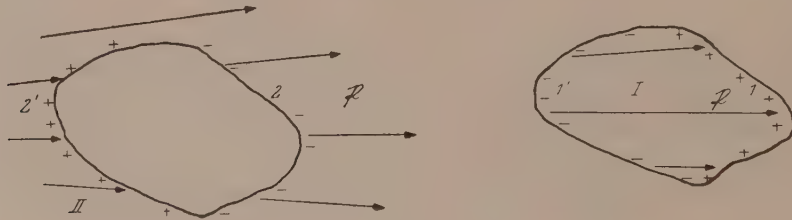


Abb. 2

Ladungsverteilung sowohl der entfernten als auch der zurückbleibenden Materie nichts ändern soll, so zeigt sich, daß außer den im Inneren der Bereiche I und II auftretenden räumlich verteilten „freien“ Ladungen auch an der Grenzfläche, makroskopisch gesehen flächenhaft verteilte Polarisationsladungen auftreten. Diese waren vor der Entfernung der Materie nicht feststellbar, da sich die beiden flächenhaften Ladungsschichten in der Grenzfläche gedeckt und wegen des gleichen Betrages, aber der verschiedenen Polarität makroskopisch aufgehoben hatten. Die beiden sich deckenden Flächenladungen 1 und 2 (oder 1' und 2') gehören aber natürlich zu verschiedenen Materiebereichen, und es ergibt sich daher: Die Ladung eines „körperlichen“ Materiebereiches ist nicht nur durch die makroskopisch in Erscheinung tretende räumliche „freie“ Ladungsdichte  $\varrho'^{(\text{el})}$ , also durch die „freie“ Ladung  $Q'^{(\text{el})}$

$$Q'^{(\text{el})} = \int_V \varrho'^{(\text{el})} dV = \int_V (\varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})} + \varrho_{\text{p}}^{(\text{el})}) dV, \quad (10)$$

<sup>19</sup> S. die Fußnoten 8 bis 11, S. 287.

allein gegeben, sondern die Gesamtladung eines körperlichen, physikalisch richtig abgegrenzten Bereiches ist vom Standpunkt der Kontinuumsauffassung aus gesehen durch die in seinem Inneren räumlich verteilte „freie“ Ladung der Dichte  $\varrho^{(\text{el})}$  und die an der Bereichsgrenze latent vorhandene, jeweils immer von der Materie des angrenzenden Bereiches kompensierte, flächenhaft verteilte Polarisationsladung der Dichte  $\sigma_{\text{P}}^{(\text{el})}$  bestimmt:

$$Q^{(\text{el})} = \int_V \varrho^{(\text{el})} dV + \oint_A \sigma_{\text{P}}^{(\text{el})} dA = Q'^{(\text{el})} + \oint_A \sigma_{\text{P}}^{(\text{el})} dA. \quad (11)$$

Diese Tatsache wurde erstmals bei magnetisch polarisierten Körpern erkannt. Bei einem permanenten Magneten z. B. treten nach Trennung an einer beliebigen Stelle sofort diese beiden vorher nicht feststellbaren Flächenladungen entgegengesetzten Vorzeichens ungeändert in Erscheinung:



Abb. 3

Die Größe dieser noch zum körperlichen Bereich gehörigen, in der Grenzfläche liegenden Flächenladungsdichte ist entsprechend den Definitionen der Polarisationsvektoren im elektrischen Feld durch

$$\sigma_{\text{P}}^{(\text{el})} = \mathfrak{P} \mathfrak{n} \quad (12)$$

( $\mathfrak{n}$  ... äußerer Einheitsvektor der Flächennormalen der Bereichsgrenzfläche), im magnetischen Feld, das man auf magnetische Ladungen (Mengen) zurückführt, durch

$$\sigma_{\text{P}}^{(\text{mgn})} = \mathfrak{J} \mathfrak{n} \quad (13)$$

gegeben.

Ändern sich an der Grenzfläche zweier Medien die Materialeigenschaften sprunghaft, so kompensieren sich die beiden in der Grenzfläche liegenden Flächenladungen der aneinandergrenzenden Medien 1 und 2 nicht mehr. Es tritt jetzt die von Null verschiedene Differenz der Beträge der Flächenladungsdichten makroskopisch in Erscheinung. Diese Differenz, der Sprung der Normalkomponente, ist dann die (negative<sup>19a</sup>) Flächendivergenz des Polarisationsvektors ( $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_2$ ):

$$-\text{Div } \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{P}_1 \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{n} - \mathfrak{P}_1 \mathfrak{n} = (\mathfrak{P} \mathfrak{n})_1^2. \quad (14)$$

Von der (negativen) Flächendivergenz bedeutet also der eine Term die in der Grenzfläche liegende Flächenladung des einen, der andere Term die ebenfalls in der Grenzfläche liegende Flächenladung des anderen Materiebereiches!

An Hand der Gln. (10) und (11) läßt sich übrigens leicht nachweisen, daß die makroskopisch resultierend in Erscheinung tretende, räumlich verteilte „freie“ Ladung allein nicht die Ladung eines abgeschlossenen, körperlichen Materiebereiches sein kann. Die resultierende Polarisationsladung eines abgeschlossenen Körpers muß bekanntlich stets Null, die Gesamtladung also gleich der durch Leitungsstrom zugeführten „wahren“ Ladung sein. Dies gibt der für einen körperlichen Bereich gültige

<sup>19a</sup> Das negative Vorzeichen hängt mit der Festlegung zusammen, daß der Einheitsvektor  $\mathfrak{n}$  vom jeweiligen Bereich wegweisen soll.

Ausdruck Gl. (11), nicht aber die „freie“ Ladung Gl. (10) richtig wieder: Gl. (11) liefert nämlich unter Berücksichtigung von Gl. (9) zunächst

$$\begin{aligned} Q^{(\text{el})} &= \int_V \rho^{(\text{el})} dV + \oint_A \sigma_P^{(\text{el})} dA = \int_V \rho_{\text{wa}}^{(\text{el})} dV + \int_V \rho_P^{(\text{el})} dV + \oint_A \sigma_P^{(\text{el})} dA = \\ &= Q_{\text{wa}}^{(\text{el})} - \int_V \text{div } \mathfrak{P} dV + \oint_A \mathfrak{P} \mathbf{n} dA. \end{aligned} \quad (15)$$

Wegen des Gaußschen Integralsatzes verschwinden die beiden letzten Summanden in Gl. (15) und es wird die Gesamtladung  $Q^{(\text{el})}$  eines körperlichen Materiebereiches  $Q^{(\text{el})} = Q_{\text{wa}}^{(\text{el})}$ , also wie erforderlich gleich der „wahren“ Ladung allein.

Zur Unterscheidung der beiden besprochenen Begrenzungsarten von Materie wurden die folgenden Bezeichnungen eingeführt (s.<sup>20</sup>): Die Begrenzungsart eines Materiebereiches, bei der nur die makroskopisch in Erscheinung tretende Ladungs-

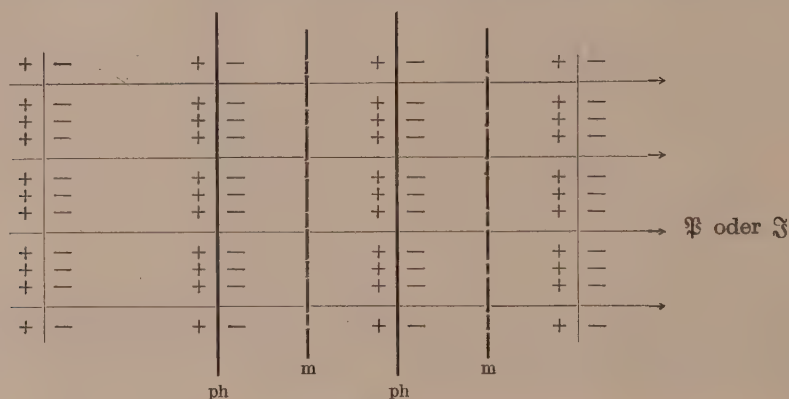


Abb. 4a

m ... „mathematische“,  
ph ... „physikalische“ Grenzfläche in der kontinuumsmäßigen Darstellung

dichte erfaßt wird, wird „mathematische“ Bereichsabgrenzung genannt. Die „mathematische“ Bereichsabgrenzung ist also prinzipiell z. B. bei der Bildung der Mittelwerte der Größen des Mikrobereiches anzuwenden. Begrenzt man hingegen einen Bereich physikalisch richtig als körperlichen Bereich, werden also beim Kontinuum außer den im Inneren räumlich verteilten auch die in der Bereichsgrenze liegenden noch zum Körper gehörigen flächenhaften Ladungsdichten berücksichtigt und mit-erfaßt, so wird diese Begrenzungsart „physikalische“ Begrenzung des Materiebereiches genannt. Die flächenhaften Ladungen in der Grenzfläche treten dabei makroskopisch, mit Ausnahme an Sprungflächen, nicht in Erscheinung, da sie von den gleich großen Flächenladungen umgekehrten Vorzeichens des angrenzenden Materiebereiches kompensiert werden. Es ist dann beispielsweise die makroskopisch allein in Erscheinung tretende „freie“ Ladung Gl. (10) die Gesamtladung eines „mathematisch“ begrenzten Bereiches, die Gesamtladung eines körperlichen, „physikalisch“ begrenzten Bereiches ist dagegen durch Gl. (11) gegeben. Sie stimmt gemäß Gl. (15) mit der „wahren“ Ladung dieser Materie, wie es sein muß, überein.

Schon Maxwell benutzte die beiden verschiedenen Begrenzungsarten, natürlich ohne die hier verwendeten Bezeichnungen derselben. In den §§ 385 und 386 seines berühmten Werkes<sup>21</sup> berechnet er z. B. das skalare Potential eines körperlichen

<sup>20</sup> H. Hofmann: Zur Frage der Bereichsabgrenzung elektrisch und magnetisch polarisierter Materie. Elektrotechn. u. Maschinenb., 73. Jg., H. 10 (1956).

<sup>21</sup> J. Cl. Maxwell: Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Deutsche Übersetzung von Weinstein. Berlin: Springer-Verlag. 1883.



(„physikalisch“) begrenzten Bereiches magnetisierter Materie und zeigt — worauf der Verfasser in allen seinen diesbezüglichen Arbeiten, insbesondere in <sup>22</sup>, immer wieder verwiesen hat! —, daß die Darstellung polarisierter Materie durch die im Bereichsinneren räumlich und an der Bereichsgrenzfläche flächenhaft verteilten elektrischen oder magnetischen Mengen äquivalent ist der Darstellungsweise, die den körperlichen Materiebereich kontinuierlich aus Doppelschichten, also aus in sich polarisierten, „physikalisch“ begrenzten Volumselementen aufgebaut sieht (Abb. 4a). Maxwell verwendet ferner auch die „mathematische“ Bereichsabgrenzung, und zwar in § 402a, wo er nachweist, daß in einem Volumen prinzipiell nur dann resultierende Magnetmengen zustande kommen können, wenn der Bereich so begrenzt ist, daß

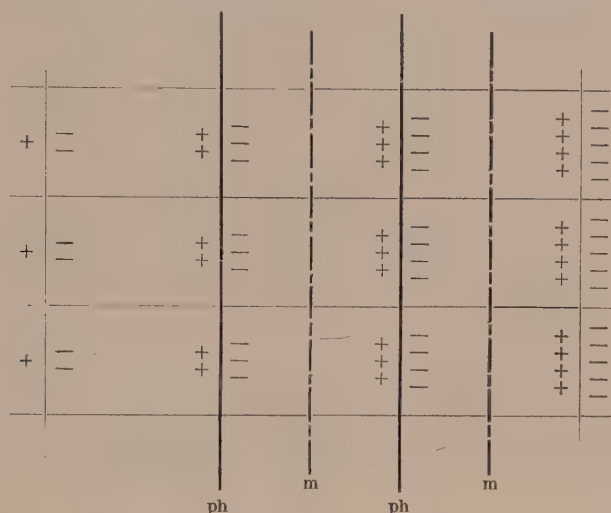


Abb. 4b

m ... „mathematische“,

ph ... „physikalische“ Grenzfläche in der kontinuiersmäßigen Darstellung

an der Grenzfläche „... Partikel zerschnitten ...“ werden. Es erweist sich, daß der Mittelwert der Ladungsdichte eines derartig, nämlich „mathematisch“ begrenzten Volumselementes auf die „freie“ Ladungsdichte  $\varrho' = \varrho_{wa} + \varrho_P$  führt, im elektrischen Feld also auf Gl. (9), bzw. bei Abwesenheit „wahrer“ Ladungen auf die Polarisationsladungsdichte  $\varrho_P$  allein, im elektrischen Feld also auf

$$\varrho_P^{(el)} = - \operatorname{div} \mathfrak{P}. \quad (16)$$

Abb. 4b läßt erkennen, daß ein Überschuß an Polarisationsladungen in einem „mathematisch“ begrenzten Volumselement auch nur dann zustande kommt, wenn sich der Polarisationszustand örtlich ändert, also Doppelschichten mit verschiedenem Dipolmoment aneinandergrenzen. In diesem Fall überwiegt im „mathematisch“ begrenzten Volumselement die Polarisationsladung eines Vorzeichens. Die „physikalischen“ Grenzflächen hüllen hingegen immer ganze Partikel (Doppelschichten) ein und ein derartig begrenzter körperlicher Bereich besitzt als resultierende Ladung, wie schon vorhin an Hand von Gl. (15) nachgewiesen wurde, stets nur die allfällig vorhandene „wahre“, aber keine resultierende Polarisationsladung. Die Abbn. 4a und 4b zeigen auch, daß im Gegensatz zur „physikalischen“ eine „mathematische“ Grenzfläche niemals zwei aneinandergrenzende Materiebereiche richtig abzugrenzen bzw. zu trennen vermag, da sie die an der Grenze liegenden Doppelschichten zer-

<sup>22</sup> S. Fußnote 21, S. 292.

schneidet. Daraus wird ersichtlich, daß die nur auf die räumliche „freie“ Ladungsdichte Bezug nehmenden Ausdrücke für „mathematische“ Begrenzung im allgemeinen für eine praktische Berechnung der Kraft oder des Drehmomentes auf einen Körper keine wesentliche Bedeutung besitzen können. Trotzdem werden sie oftmals, etwa in Zusammenhang mit den nur diese räumlichen Dichtewerte enthaltenden Feldgleichungen des elektromagnetischen Feldes bei theoretischen — aber mehr formalen — Betrachtungen herangezogen (unter anderem beim Impulssatz, vgl.<sup>23</sup> Kap. II/1 und III/1, und<sup>24</sup> Abschn. 6). Das Drehmoment hat vollends nur Sinn in bezug auf ganze Partikel, und es wird deshalb im folgenden vornehmlich im Zusammenhang mit körperlichen, „physikalisch“ begrenzten Bereichen behandelt. Einzig in dem Fall der völlig von Vakuum umgebenen Materie lassen sich auch die für „mathematische“ Begrenzung gültigen Ausdrücke praktisch verwenden. Die im Vakuum verlaufende, einen Körper einhüllende Fläche erfaßt jedenfalls alle zu diesem gehörigen Ladungen, auch wenn man sich diesen in einzelne „mathematisch“ begrenzte Volumselemente zerlegt denkt. Der etwa vorhandene Überschuß der Polarisationsladungen in den „mathematisch“ begrenzten Volumselementen des Körperinneren und die starken Überschüsse an Polarisationsladungen in den „mathematisch“ begrenzten Volumselementen der an das Vakuum grenzenden Zonen, in denen eine steile Änderung der Materialeigenschaften und damit des Polarisationszustandes auftritt, kompensieren sich gegenseitig. In Summe besitzt ein vom Vakuum umgebenes Materievolumen, auch wenn man von der „freien“ Ladungsdichte allein ausgeht, natürlich nur „wahre“ Ladung. Die unmittelbare Übereinstimmung der aus den Ausdrücken für „mathematische“ und für „physikalische“ Bereichsabgrenzung zu gewinnenden Resultate für den vom Vakuum umgebenen Körper wurde für das Potential und die resultierende Kraft in den diesbezüglichen Arbeiten des Verfassers jedesmal nachgewiesen. Sie wird sich in gleicher Weise auch für das Drehmoment nachweisen lassen.

Abschließend noch eine weitere Bemerkung zur kontinuumsmäßigen Darstellung der Materie: In einem makroskopischen Volumselement von Materie befindet sich immer noch eine zur Mittelwertbildung hinreichende Zahl von diskreten Elementarladungen. Eine derartige Ladungsverteilung besitzt nun im Falle „physikalischer“ Begrenzung nicht nur ein Dipolmoment allein, sondern auch Momente höherer Ordnung (Quadrupolmoment usw.), wobei allerdings die Wirkung dieser höheren Momente bei regelloser Anordnung der Partikel viel geringer ist als die des Dipolmomentes (s.<sup>25</sup> § 24). Identifiziert man im Sinne der Kontinuumstheorie den Vektor  $\mathfrak{P}$  bzw.  $\mathfrak{J}$  mit dem betreffenden Dipolmoment  $\mathfrak{M}^{(el)}$  bzw.  $\mathfrak{M}^{(mgn)}$  je („physikalisch“ begrenzter) Volumseinheit

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \mathfrak{E} = \frac{d\mathfrak{M}^{(el)}}{dV_{(ph)}}, \quad (17)$$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{B} - \mathfrak{H} = \frac{d\mathfrak{M}^{(mgn)}}{dV_{(ph)}}, \quad (18)$$

(Index ph ... „physikalische“ Begrenzung), so bedeutet dies, daß man die höheren Momente vernachlässigt. Die so vereinfachte Darstellung der Materie durch kontinuierlichen Aufbau aus Doppelschichten kann daher bei Problemen, bei denen die höheren Momente bereits eine Rolle spielen, nicht mehr auf richtige Ergebnisse führen; auf die Grenzen der Anwendbarkeit der Kontinuumstheorie wurde bereits eingangs verwiesen.

<sup>23</sup> S. Fußnote 11, S. 287.

<sup>24</sup> F. Hund: *Materie als Feld*. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954.

<sup>25</sup> Becker-Sauter: *Theorie der Elektrizität*, Bd. I, 16. Aufl. Stuttgart: Verlag Teubner. 1957.

## C. Der Magnetismus der Materie

Bekanntlich gibt es zwei Möglichkeiten, den Magnetismus der Materie zu deuten: Man kann ihn auf magnetische Mengen oder im Sinne der Elektronentheorie auf stationäre Elementarströme zurückführen. Im ersteren Fall soll die Bezeichnung „Theorie magnetischer Mengen“, im letzteren „Theorie der Elementarströme“ verwendet werden. Die Mengentheorie des Magnetismus wurde bisher praktisch nur in der Magnetostatik verwendet, doch können ohne weiteres auch ganz allgemein die Maxwell'schen Gleichungen eine Auslegung im Sinne dieser Theorie erfahren, so daß die Anwendung der Mengentheorie auch im nichtstationären Fall möglich ist (s. <sup>26</sup>). Wenn man sich auch heute im allgemeinen fast ausschließlich auf die Elektronentheorie bzw. die Elementarstromtheorie stützt, so wird bei der praktischen Berechnung der Kraft und des Drehmomentes auf magnetisierte Materie doch immer wieder gerne auf die Mengentheorie zurückgegriffen. Die Äquivalenz der beiden Theorien in bezug auf das außerhalb der Materie erzeugte Feld ist allgemein bekannt, ihre Äquivalenz hinsichtlich des Kraftangriffes an der Materie wurde in <sup>27</sup> nachgewiesen und sie wird sich auch für das Drehmoment nachweisen lassen. Wesentliche Voraussetzung dafür ist aber, daß stets nur sinngemäße Verknüpfungen von Größen derselben Theorie vorgenommen und nicht Größen beider Theorie miteinander vermengt werden. Solche sinnwidrige Verknüpfungen finden sich mitunter in der Literatur; sie wurden in <sup>28</sup> (Abschn. V) und <sup>29</sup> (Abschn. 3) besprochen und bilden einen weiteren Grund für die Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit dem Kraftangriff des elektromagnetischen Feldes an der Materie bisher bestanden haben.

Die Mengentheorie beschreibt magnetisierte Materie zunächst durch die im Bereichsinneren räumlich verteilten Magnetmengen, wobei wegen des Fehlens „wahrer“ Magnetmengen die „freien“ Mengen ausschließlich Polarisationsmengen sind. Dieser Zusammenhang wird durch

$$\rho^{(\text{mgn})} = \text{div } \mathfrak{H} = - \text{div } \mathfrak{J} = \rho_p^{(\text{mgn})} \quad (19)$$

dargestellt. An der Bereichsgrenze liegen die noch zum „physikalisch“ begrenzten, körperlichen Bereich gehörigen flächenhaften Magnetmengen der Dichte

$$\sigma_p^{(\text{mgn})} = \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{n}. \quad (13)$$

Die Analyse der Mengentheorie hat gezeigt, daß im Sinne dieser Theorie der Makrovektor  $\mathfrak{H}$  die Bedeutung der Feldstärke des Magnetfeldes erhält (s. <sup>30</sup>, Abschn. 2), er ist im Rahmen dieser Theorie für den Kraftangriff an den Magnetmengen und den Leitungsströmen heranzuziehen.

Die Elementarstromtheorie legt dem Magnetismus der Materie Elementarströme zugrunde, die im Bereichsinneren mit der räumlichen Dichte

$$\mathfrak{G}^{(\text{E})} = c_0 \text{rot } \mathfrak{J} \quad (20)$$

auftreten. An der Bereichsgrenze sind die flächenhaften Ströme

$$\mathfrak{j}^{(\text{E})} = c_0 \mathfrak{J} \times \mathfrak{n} \quad (21)$$

( $\mathfrak{n}$  ... äußerer Einheitsvektor der Flächennormalen der Grenzfläche des betrachteten Materiebereiches) zu berücksichtigen. Bei Anwendung der Elektronen- bzw. der

<sup>26</sup> S. Fußnote 17, S. 289.

<sup>27</sup> S. Fußnote 8, S. 287.

<sup>28</sup> S. Fußnote 8, S. 287.

<sup>29</sup> S. Fußnote 17, S. 289.

<sup>30</sup> S. Fußnote 17, S. 289.



Elementarstromtheorie muß weiters beachtet werden, daß hier dem Vektor  $\mathfrak{B}$  die Bedeutung der magnetischen Makrofeldstärke zuzumessen ist (s.<sup>31</sup>, Abschn. 1).

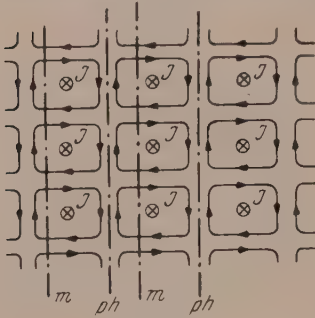


Abb. 5

m ... „mathematische“,  
ph ... „physikalische“ Grenz-  
fläche in der kontinuums-  
mäßigen Darstellung

Geht man bis auf ein makroskopisches Volumselement zurück, so ist dieses im Rahmen der kontinuumsmäßigen Beschreibung nach der Mengentheorie eine Doppelschicht, nach der Elementarstromtheorie ein Wirbelring. Wie schon erwähnt, ist der kontinuierliche Aufbau der Materie aus Doppelschichten gleichbedeutend mit der Darstellung durch die räumlichen und flächenhaften Ladungsverteilungen. Dasselbe gilt für den kontinuierlichen Aufbau aus Wirbelringen und die Darstellung durch die räumlichen und flächenhaften Ströme, was bereits in<sup>32</sup> gezeigt wurde. Beim Sprung der magnetischen Materialeigenschaften an der Grenzfläche zweier Medien kompensieren sich vom Standpunkt der „Elementarstromtheorie“ aus gesehen in der Grenzfläche fließenden Flächenströme der aneinander grenzenden Materiebereiche nicht mehr. Es tritt in einem

solchen Fall die Differenz der Beträge der Flächenstromdichten als Flächenrotor von  $c_0 \mathfrak{J}$

$$\text{Rot } c_0 \mathfrak{J} = c_0 \mathfrak{J}_2 \times \mathbf{n}_2 + c_0 \mathfrak{J}_1 \times \mathbf{n}_1 = c_0 \mathfrak{J}_2 \times \mathbf{n} - c_0 \mathfrak{J}_1 \times \mathbf{n} = c_0 (\mathfrak{J} \times \mathbf{n})_1^2 \quad (22)$$

in der Grenzfläche makroskopisch in Erscheinung ( $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ ). Aus Verständnisgründen, nämlich um die Form der Gl. (22) unmittelbar aus Gl. (21) herzuleiten, wurde in Gl. (22) die Bedeutung des Einheitsvektors der Flächennormalen als jeweils nach außen vom Bereich wegweisender Vektor beibehalten. In der Literatur wird der Einheitsvektor an Sprungflächen meist so indiziert, daß er die Bedeutung des in den jeweiligen Bereich hinweisenden Vektors besitzt. Dann wären entsprechend dieser letzteren Bezeichnungsweise in Gl. (22) die Vektoren  $\mathfrak{J}$  und  $\mathbf{n}$  in den Vektorprodukten des Flächenrotors zu vertauschen.

### III. Das direkte, körperfeste Drehmoment im elektrostatischen Feld

#### A. Ansatz und Umwandlung in ein Volumsintegral

Das Drehmoment  $\mathfrak{D}_{(\text{ph})}^{(\text{el})}$  der körperfesten Kräfte, die an den im Inneren des „physikalisch“ begrenzten, körperlichen Bereiches räumlich und an der Bereichsgrenzfläche flächenhaft verteilten Ladungen angreifen, ist

$$\mathfrak{D}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} = \int_V \mathbf{r} \times \varrho^{(\text{el})} \mathfrak{E} dV + \oint_A \mathbf{r} \times \sigma_P^{(\text{el})} \mathfrak{E} dA. \quad (23)$$

Drückt man gemäß den Gln. (9) und (12) die Ladungsdichten durch die entsprechenden Feldvektoren aus, so folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} &= \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{E} \text{div } \mathfrak{E} dV + \oint_A \mathbf{r} \times \mathfrak{E} (\mathfrak{B} \mathbf{n}) dA = \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{E} \text{div } \mathfrak{D} dV - \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{E} \text{div } \mathfrak{P} dV + \\ &\quad + \oint_A (\mathbf{r} \times \mathfrak{E}) (\mathfrak{B} \mathbf{n}) dA. \end{aligned} \quad (24)$$

Das Oberflächenintegral in Gl. (24) wird nun weiter umgeformt, wobei auch der Gaußsche Integralsatz Anwendung findet:

$$\begin{aligned} \oint_A (\mathbf{r} \times \mathfrak{E}) (\mathfrak{B} \mathbf{n}) dA &= \oint_A (d\mathfrak{A} \mathfrak{B}) (\mathbf{r} \times \mathfrak{E}) = \oint_A d\mathfrak{A} \{ \mathfrak{B}; (\mathbf{r} \times \mathfrak{E}) \} = \int_V dV \nabla \{ \mathfrak{B}; (\mathbf{r} \times \mathfrak{E}) \} = \\ &= \int_V (\nabla \mathfrak{B}) (\mathbf{r} \times \mathfrak{E})_e dV + \int_V (\mathfrak{B} \nabla) (\mathbf{r} \times \mathfrak{E}) dV. \end{aligned} \quad (25)$$

<sup>31</sup> S. Fußnote 17, S. 289.

<sup>32</sup> S. Fußnote 9, S. 287.

Der Index  $c$  bedeutet, daß der betreffende Ausdruck — hier der Klammerausdruck  $(\mathbf{r} \times \mathfrak{E})$  — bezüglich des vorherstehenden Differentiationsoperators — hier  $\nabla$  — konstant zu halten ist. Es folgt aus Gl. (25) weiter

$$\begin{aligned} \oint_A (\mathbf{r} \times \mathfrak{E}) (\mathfrak{P} n) dA &= \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P} dV + \int_V (\mathfrak{P} \nabla) \mathbf{r} \times \mathfrak{E} dV = \\ &= \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P} dV + \int_V (\mathfrak{P} \nabla) \mathbf{r} \times \mathfrak{E}_c dV + \int_V \mathbf{r} \times (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} dV = \\ &= \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P} dV - \int_V \mathfrak{E} \times \{\mathfrak{P} (\nabla; \mathbf{r})\} dV + \int_V \mathbf{r} \times (\mathfrak{P} \operatorname{grad}) \mathfrak{E} dV. \end{aligned} \quad (26)$$

Wegen

$$\nabla; \mathbf{r} = \mathbf{I} \quad (27)$$

( $\mathbf{I}$  ... Einheitstensor) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \oint_A (\mathbf{r} \times \mathfrak{E}) (\mathfrak{P} n) dA &= \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P} dV + \int_V \mathbf{r} \times (\mathfrak{P} \operatorname{grad}) \mathfrak{E} dV - \int_V \mathfrak{E} \times (\mathfrak{P} \mathbf{I}) dV = \\ &= \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P} dV + \int_V \mathbf{r} \times (\mathfrak{P} \operatorname{grad}) \mathfrak{E} dV - \int_V \mathfrak{E} \times \mathfrak{P} dV. \end{aligned} \quad (28)$$

Führt man Gl. (28) in Gl. (24) ein, so gelangt man zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} &= \int_V \mathbf{r} \times \{\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{D} + (\mathfrak{P} \operatorname{grad}) \mathfrak{E}\} dV - \int_V \mathfrak{E} \times \mathfrak{P} dV = \\ &= \int_V \mathbf{r} \times \{\varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})} \mathfrak{E} + (\mathfrak{P} \operatorname{grad}) \mathfrak{E}\} dV + \int_V \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} dV. \end{aligned} \quad (29)$$

Der in der geschlungenen Klammer des ersten Integrals in Gl. (29) stehende Ausdruck ist aber gerade die an einem körperlichen Bereich angreifende Kraftdichte [s. <sup>33</sup>, Gl. (29), (31) und (32)]

$$\mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} = \varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})} \mathfrak{E} + (\mathfrak{P} \operatorname{grad}) \mathfrak{E} = \operatorname{div} \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} = \nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} \quad (30)$$

( $\tilde{\mathbf{T}}$  ... transponierter Tensor zu  $\mathbf{T}$ ) mit dem Tensor

$$\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} = \mathfrak{E}; \mathfrak{D} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \mathbf{I} = \mathfrak{E}; \mathfrak{D} - \frac{1}{2} (\mathfrak{D} \mathfrak{E}) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{P} \mathfrak{E}) \mathbf{I}, \quad (31)$$

so daß also aus Gl. (29) folgendes Ergebnis folgt:

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} = \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} dV + \int_V \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} dV = \int_V \{\mathbf{r} \times (\nabla \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})}) + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E}\} dV. \quad (32)$$

Geht man schließlich auf das Drehmoment je („physikalisch“ begrenzter, körperlicher) Volumseinheit, also auf die Momentendichte, über, so erhält man:

$$\mathfrak{t}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} = \frac{d\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})}}{dV} = \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E}. \quad (33)$$

Die Momentendichte ist somit nicht allein durch das Moment der Volumskräfte gegeben. Es tritt vielmehr noch ein zweiter Summand, das Vektorprodukt aus Polarisationsvektor und Feldstärke, auf. Dieser Summand stellt die Momentendichte der Kräftepaare dar, die auf die polarisierten Volumselemente einwirken. Diese Kräftepaare liefern einerseits zur resultierenden Kraftdichte keinen Beitrag. Andererseits ist es aber einleuchtend, daß das Moment der resultierenden Volumskräfte allein im allgemeinen keineswegs gleich der resultierenden Momentendichte sein kann, da eben noch die Momentendichte der Kräftepaare hinzukommen muß.

Man erkennt diese Zusammenhänge leichter, wenn man das Resultat Gl. (32) bzw. (33) nicht, wie eben durchgeführt, vom Moment der auf die räumlichen und

<sup>33</sup> S. Fußnote 8, S. 287.





in Übereinstimmung mit dem bereits in Gl. (33) erhaltenen Resultat für die Momentendichte

$$\mathfrak{t}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} = \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E}. \quad (33)$$

Wie schon erwähnt, ist der erste Summand dieser Beziehung das Moment der resultierenden Volumskräfte, der zweite bedeutet die Momentendichte der an der Materie angreifenden Kräftepaare. Es erweist sich somit, daß die Darstellung kontinuierlicher Materie mit Hilfe der im Bereichsinneren räumlich und an der Körpergrenze flächenhaft verteilten Ladungen, wie erwartet, auch hinsichtlich des Drehmomentes äquivalent ist der Darstellung durch kontinuierlich verteilte „wahre“ Ladungen und Doppelschichten.

In Abschn. II/B wurde erwähnt, daß man im Spezialfall des völlig vom Vakuum umgebenen Körpers auch mit Hilfe des für „mathematisch“ begrenzte Bereiche gültigen, nur die räumliche „freie“ Ladungsdichte berücksichtigenden Ausdruckes auf dasselbe, richtige Resultat gelangen müsse wie mit Hilfe des für körperliche, „physikalisch“ begrenzte Bereiche gültigen Ansatzes. Das Drehmoment der an den räumlich verteilten „freien“ Ladungen allein angreifenden Kräfte ist

$$\mathfrak{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})} = \int_V \mathbf{r} \times \varrho'^{(\text{el})} \cdot \mathfrak{E} dV = \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{m})}^{(\text{el})} dV. \quad (45)$$

(Index  $m \dots$  „mathematische“ Bereichsabgrenzung). Dabei war die für „mathematisch“ begrenzte Bereiche gültige Volumskraft [s. <sup>34</sup>, Gl. (18) bzw. (23)]

$$\mathfrak{f}_{(\text{m})}^{(\text{el})} = \varrho'^{(\text{el})} \cdot \mathfrak{E} = \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} = \operatorname{div} \mathfrak{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})} = \nabla \cdot \hat{\mathfrak{T}}_{(\text{m})}^{(\text{el})} \quad (46)$$

mit dem symmetrischen Tensor

$$\mathfrak{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})} = \mathfrak{E}; \mathfrak{E} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \mathbf{I} = \hat{\mathfrak{T}}_{(\text{m})}^{(\text{el})}. \quad (47)$$

Es läßt sich daher das Drehmoment eines körperlichen Materiebereiches Gl. (23) wegen Gl. (45) im allgemeinen Fall auch

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} = \mathfrak{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})} + \oint_A \mathbf{r} \times \sigma_{\text{P}}^{(\text{el})} \mathfrak{E} dA = \mathfrak{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})} + \oint_A \mathbf{r} \times (\mathfrak{P} \mathbf{n}) \mathfrak{E} dA \quad (48)$$

schreiben. Man gelangt ja auch bekanntlich immer zu dem jeweiligen Ausdruck für „physikalische“ Begrenzung, indem man zusätzlich zu dem Ausdruck für „mathematische“ Abgrenzung, der sich ausschließlich auf die räumliche „freie“ Ladungsdichte bezieht, noch den Ausdruck für die an der Bereichsgrenze latent vorhandene Flächenladung hinzufügt. Verläuft nun die Hüllfläche zur Gänze im Vakuum, so verschwindet das Oberflächenintegral in Gl. (48) wegen  $\mathfrak{P}_0 = 0$  und es wird in diesem einzigen Fall  $\mathfrak{T}_{(\text{ph})0}^{(\text{el})} = \mathfrak{T}_{(\text{m})0}^{(\text{el})}$ , da eben bei einem vom Vakuum umgebenen Körper auch die „freie“ Ladungsdichte allein in Summe alle seine Ladungen erfaßt.

## B. Umwandlung in ein Oberflächenintegral

Es ist im vorangegangenen Abschnitt III/A gelungen, das direkte, körperfeste Drehmoment der auf die räumlichen und flächenhaften Ladungen eines körperlichen Materiebereiches ausgeübten Kräfte Gl. (23) in das Volumsintegral Gl. (29) bzw. (32) umzuwandeln, also

$$\begin{aligned} (23), (29), (32) \quad \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} &= \int_V \mathbf{r} \times \varrho'^{(\text{el})} \cdot \mathfrak{E} dV + \oint_A \mathbf{r} \times \sigma_{\text{P}}^{(\text{el})} \mathfrak{E} dA = \\ &= \int_V (\mathbf{r} \times \{ \varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})} \mathfrak{E} + (\mathfrak{P} \operatorname{grad} \mathfrak{E}) \} + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E}) dV = \int_V \{ \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} \} dV. \end{aligned} \quad (49)$$

<sup>34</sup> S. Fußnote 8, S. 287.

Der Integrand dieses Volumsintegrals ließ sich dabei zwanglos als Momentendichte der auf die polarisierten, körperlichen Volumselemente ausgeübten Kräfte deuten. Da dabei die Volumskräfte  $\mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el})}$  bereits eine resultierende Kraftdichte darstellen, mußte zusätzlich zu deren Moment zwangsläufig noch ein weiterer Summand, nämlich  $\mathfrak{P} \times \mathfrak{E}$ , auftreten, der die Momentendichte der an den polarisierten Volumselementen angreifenden Kräftepaare bedeutet. Für eine praktische Anwendung wäre es nun außerordentlich wichtig, daß die Umwandlung der Gl. (49) in ein Oberflächenintegral gelänge, wie dies allgemein bei der Bildung der resultierenden Kräfte möglich war (s. <sup>35</sup>, Abschn. VIII): Sowohl die körperfeste als auch die ponderomotorische Kraftdichte konnten als Divergenz eines Tensors dargestellt werden, so daß man die Resultierende  $\mathfrak{F}$  als Volumsintegral über eine Kraftdichte  $\mathfrak{f}$  in einfacher Weise mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in ein Oberflächenintegral über Spannungen  $\mathfrak{p}$  umformen konnte:

$$\mathfrak{F} = \int_V \mathfrak{f} dV = \int_V \nabla \tilde{T} dV = \oint_A \mathbf{T} \mathbf{n} dA = \oint_A \mathfrak{p} dA. \quad (50)$$

Der Vorteil einer derartigen Umformung liegt darin, daß man von den Verhältnissen des Bereichsinneren unabhängig wird und nur die Feldwerte an der Außenseite der Hüllfläche bekannt sein müssen. Obwohl die körperfesten Volumskräfte Gl. (30) selbst aus einem unsymmetrischen Tensor Gl. (31) abgeleitet werden, gelingt trotzdem eine derartige Umformung in ein Oberflächenintegral auch beim körperfesten Drehmoment, was auf die zusätzliche Momentendichte der Kräftepaare zurückzuführen ist. Man geht hierzu am besten wieder vom ursprünglichen Ansatz Gl. (23) für das körperfeste Drehmoment aus: Führt man in diese Gleichung die Beziehungen (9), (12) und (46) ein, so ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} (23), (9), (12), (46) \quad \mathfrak{L}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} &= \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{e}'^{(\text{el})} \mathfrak{E} dV + \oint_A \mathbf{r} \times \sigma_{\text{P}}^{(\text{el})} \mathfrak{E} dA = \\ &= \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} dV + \oint_A \mathbf{r} \times \mathfrak{E} (\mathfrak{P} \mathbf{n}) dA = \\ &= \int_V \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})}) dV + \oint_A \mathbf{r} \times \{(\mathfrak{E}; \mathfrak{P}) \mathbf{n}\} dA = J_1 + \oint_A \mathbf{r} \times \{(\mathfrak{E}; \mathfrak{P}) \mathbf{n}\} dA. \end{aligned} \quad (51)$$

Das zweite Integral ist bereits ein Oberflächenintegral, so daß nur mehr der erste Ausdruck  $J_1$  umgewandelt werden muß:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_V \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})}) dV = - \int_V (\nabla \tilde{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})}) \times \mathbf{r}_c dV = - \int_V (\nabla \tilde{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})}) \times \mathbf{r} dV + \\ &+ \int_V (\nabla \tilde{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})}) \times \mathbf{r} dV = - \int_V dV (\nabla \tilde{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})}) \times \mathbf{r} + \int_V (\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})} \nabla) \times \mathbf{r} dV. \end{aligned} \quad (52)$$

Zu beachten ist dabei, daß alle hinter  $\nabla$  stehenden Größen zu differenzieren sind, falls sie von den mit  $\nabla$  zusammenhängenden Koordinaten abhängen, es sei denn, daß durch den Index  $c$  angedeutet ist, daß sie bezüglich des vorherstehenden Differentiationsoperators konstant zu halten sind. Es erweist sich hier wieder die formale Schreibweise des Gaußschen Satzes als Operatorenregel

$$\int_V dV \nabla = \oint_A dA \mathbf{n} \quad (53)$$

als sehr praktisch, da das erste Integral der letzten Form von Gl. (52), in dem sowohl  $\tilde{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})}$  als auch  $\mathbf{r}$  zu differenzieren sind, in einfacher Weise umgeformt werden kann, so daß weiterhin folgt:

$$J_1 = - \oint_A dA (\mathbf{n} \tilde{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})}) \times \mathbf{r} + \int_V (\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})} \nabla) \times \mathbf{r} dV = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})} \mathbf{n}) dA + \int_V (\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{el})} \nabla) \times \mathbf{r} dV. \quad (54)$$

<sup>35</sup> S. Fußnote 8, S. 287.

Führt man  $J_1$  wieder in Gl. (51) ein und verwendet die für den Tensor  $\mathbf{T}_{(m)}^{(el)}$  gültige Beziehung Gl. (47), so ergibt sich

$$\mathfrak{T}_{(ph)}^{(el)} = \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ (\mathfrak{E}; \mathfrak{E} + \mathfrak{E}; \mathfrak{P} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \mathbf{I}) \mathbf{n} \right\} dA + \int_V (\mathbf{T}_{(m)}^{(el)} \nabla) \times \mathbf{r} dV. \quad (55)$$

Faßt man die beiden Dyaden  $\mathfrak{E}; \mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{E}; \mathfrak{P}$  zu  $\mathfrak{E}; \mathfrak{D}$  zusammen, so gelangt man schließlich zu

$$\mathfrak{T}_{(ph)}^{(el)} = \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ (\mathfrak{E}; \mathfrak{D} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \mathbf{I}) \mathbf{n} \right\} dA + \int_V (\mathbf{T}_{(m)}^{(el)} \nabla) \times \mathbf{r} dV. \quad (56)$$

Da nun der Tensor  $\mathbf{T}_{(m)}^{(el)}$  gemäß Gl. (47) symmetrisch ist, verschwindet der letzte Summand in Gl. (56). [Der Nachweis hierfür kann etwa bei <sup>36</sup>, III. Teil, Abschn. 1 b, Gln. (2) und (3) auf S. 230, anlässlich der Behandlung des symmetrischen Spannungstensors der Mechanik nachgelesen werden.] Die Dyadensumme des ersten Integrals in Gl. (56) entspricht aber dem Tensor  $\mathbf{T}_{(ph)}^{(el)}$  nach Gl. (31), so daß also endgültig erhalten wird:

$$\mathfrak{T}_{(ph)}^{(el)} = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(ph)}^{(el)} \mathbf{n}) dA = \oint_A \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{(ph)}^{(el)} dA. \quad (57)$$

Das Resultat Gl. (57) besagt, daß das körperfeste Drehmoment allein aus dem Moment von Spannungen berechnet werden kann. Es handelt sich dabei gerade um diejenigen Spannungen, die über die Oberfläche integriert auch die richtige resultierende, körperfeste Kraft liefern, da sie durch denselben Tensor  $\mathbf{T}_{(ph)}^{(el)}$  bestimmt sind wie die körperfesten Volumskräfte Gl. (30).

Zusammenfassend kann also die überaus wichtige Feststellung gemacht werden, daß einerseits bei der Darstellung der körperfesten Kraft und des körperfesten Drehmomentes mit Hilfe eines Systems von Spannungen, die an der Oberfläche eines körperlichen Materiebereiches angreifen,

$$\mathbf{p}_{(ph)}^{(el)} = \mathbf{T}_{(ph)}^{(el)} \mathbf{n}, \quad (58)$$

sowohl die resultierende Kraft als auch das resultierende Drehmoment durch die beiden anschaulichen Formeln gefunden werden:

$$\mathfrak{U}_{(ph)}^{(el)} = \oint_A \mathbf{p}_{(ph)}^{(el)} dA, \quad (59)$$

$$\mathfrak{T}_{(ph)}^{(el)} = \oint_A \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{(ph)}^{(el)} dA. \quad (60)$$

Die Kraft und das Drehmoment erscheinen hier direkt als Resultierende der Spannungen bzw. als Summe der Momente derselben Spannungen. Bei der Darstellung mit Hilfe der Volumskräfte

$$(30) \quad \mathbf{f}_{(ph)}^{(el)} = \operatorname{div} \mathbf{T}_{(ph)}^{(el)} = \nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(ph)}^{(el)}$$

gelangt man andererseits zu

$$\mathfrak{U}_{(ph)}^{(el)} = \int_V \mathbf{f}_{(ph)}^{(el)} dV \quad (61)$$

und entsprechend Gl. (32) zu

$$\mathfrak{T}_{(ph)}^{(el)} = \int_V \{ \mathbf{r} \times \mathbf{f}_{(ph)}^{(el)} + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} \} dV. \quad (62)$$

Die resultierende, körperfeste Kraft ist wohl wieder die Resultierende der Volumskräfte, das resultierende, körperfeste Drehmoment setzt sich aber nicht nur aus den Momenten der Volumskräfte zusammen, sondern es treten noch die Momente der

<sup>36</sup> E. Lohr: Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker, 2. Aufl. Berlin: Verlag de Gruyter u. Co. 1950.



an den polarisierten Volumselementen angreifenden Kräftepaare, die ihrerseits zur resultierenden Kraft Gl. (61) naturgemäß nichts beitragen, hinzu.

### C. Der Spezialfall der Isotropie

Die Verhältnisse vereinfachen sich, wenn die Materie isotrop ist und daher Proportionalität zwischen  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{E}$  besteht:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \quad (63)$$

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \mathfrak{E} = (\varepsilon - 1) \mathfrak{E} = \chi \mathfrak{E} \quad (64)$$

( $\varepsilon \dots$  Dielektrizitätskonstante,  $\chi \dots$  Suszeptibilität). Da in diesem Fall Polarisations- und Feldvektor parallel sind, verschwindet der Einfluß der Kräftepaare beim Drehmoment, der Tensor  $\mathbb{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})}$  der körperfesten Kräfte, mit denen das Feld an einem körperlichen, „physikalisch“ begrenzten Materiebereich angreift, wird symmetrisch:

$$(31), (63) \quad \mathbb{T}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{el})} = \varepsilon \mathfrak{E}; \mathfrak{E} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \mathbf{I} = \tilde{\mathbb{T}}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{el})}. \quad (65)$$

Die Symmetrie des Tensors bewirkt, daß sich das Drehmoment der Volumskräfte allein bereits in das Drehmoment der Spannungen umwandeln läßt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{el})} &= \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{el})} dV = \int_V \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{\mathbb{T}}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{el})}) dV = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbb{T}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{el})} \mathbf{n}) dA + \\ &+ \int_V (\mathbb{T}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{el})} \nabla) \times \mathbf{r} dV = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbb{T}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{el})} \mathbf{n}) dA = \oint_A \mathbf{r} \times \mathfrak{p}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{el})} dA \end{aligned} \quad (66)$$

[vgl. die Erläuterungen zu Gl. (56)]. Man erkennt dies auch unmittelbar an dem Vergleich der Gln. (60) und (62), wenn man dabei berücksichtigt, daß jetzt die Momentendichte  $\mathfrak{P} \times \mathfrak{E}$  der Kräftepaare wegen  $\mathfrak{P} \uparrow \uparrow \mathfrak{E}$  gleich Null wird.

### IV. Das ponderomotorische Drehmoment im elektrostatischen Feld

Die Tatsache, daß der klassische Maxwell-Tensor  $\mathbb{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})}$ , aus dem die ponderomotorischen Volumskräfte gemäß

$$\mathfrak{f}_{\text{pond}}^{(\text{el})} = \text{div } \mathbb{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} = \nabla \tilde{\mathbb{T}}_{\text{pond}}^{(\text{el})} \quad (67)$$

bzw. die ponderomotorischen Oberflächenkräfte (Maxwellschen Spannungen) gemäß

$$\mathfrak{p}_{\text{pond}}^{(\text{el})} = \mathbb{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} \mathbf{n} \quad (68)$$

abgeleitet werden, unsymmetrisch ist,

$$\mathbb{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} = \mathfrak{E}; \mathfrak{D} - \frac{1}{2} (\mathfrak{D} \mathfrak{E}) \mathbf{I}, \quad (69)$$

bewirkt, daß das Moment der ponderomotorischen Volumskräfte allein nicht in das Moment der ponderomotorischen Spannungen umgewandelt werden kann, da

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{\text{pond}}^{(\text{el})} dV &= \int_V \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{\mathbb{T}}_{\text{pond}}^{(\text{el})}) dV = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbb{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} \mathbf{n}) dA + \int_V (\mathbb{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} \nabla) \times \mathbf{r} dV = \\ &= \oint_A \mathbf{r} \times \mathfrak{p}_{\text{pond}}^{(\text{el})} dA + \int_V (\mathbb{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} \nabla) \times \mathbf{r} dV \end{aligned} \quad (70)$$

wird und der letzte Summand  $\int_V (\mathbb{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} \nabla) \times \mathbf{r} dV$  wegen der Unsymmetrie des Maxwellschen Spannungstensors nicht verschwindet. Es kann also nur entweder das Moment der Maxwellschen Volumskräfte oder das Moment der Maxwellschen Spannungen Allgemeingültigkeit für sich beanspruchen. In der Literatur wird der Maxwellsche Spannungstensor stets für den Fall isotroper Materie abgeleitet, wo er

natürlich wieder symmetrisch ist und wo daher die unmittelbare Umformung des Momentes der Volums- in das der Oberflächenkräfte möglich wird. Im allgemeinen Fall des beliebigen Zusammenhanges  $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}$  wird dann vielfach die Gültigkeit des klassischen Maxwell-Tensors angezweifelt. So stellen Sommerfeld und Bopp<sup>37</sup> das weiter nicht begründete Postulat auf, daß sich die Kraftdichte im allgemeinen Fall ebenfalls aus einem symmetrischen Spannungstensor ableiten lassen müsse und der demnach mit dem klassischen Maxwell-Tensor nicht übereinzustimmen brauche, damit auch jetzt die einfache Umformung

$$\mathfrak{T} = \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{f} dV = \oint_A \mathbf{r} \times \mathfrak{p} dA \quad (71)$$

möglich wird. Die beiden Autoren schlagen unter anderem einen „symmetrisierten“ Maxwellischen Spannungstensor vor, also eine gewaltsam symmetrisch gemachte Abwandlung des klassischen Maxwell-Tensors. Die Erörterungen des vorhergehenden Kapitels III haben gezeigt, daß wegen der Polarität der Materie eine Symmetrie des Spannungstensors und damit die einfache Umformung Gl. (71) nicht erwartet werden kann. Es muß eben wegen der an der polarisierten Materie angreifenden Kräftepaare zu dem Moment der Volumskräfte noch die Momentendichte dieser Kräftepaare hinzutreten. Nicht die Umformung Gl. (71) ist bei polarisierter Materie „anschaulich“, wie die beiden vorhin genannten Autoren meinen, sondern vielmehr die im Falle des körperfesten Drehmomentes nachgewiesene Gleichheit der Beziehungen Gl. (60) und (62). Auch für das ponderomotorische Drehmoment wird sich zeigen lassen, daß zum Moment der Volumskräfte der entsprechende Ausdruck für die Kräftepaare hinzuzutreten hat.

Analog zur Berechnung der ponderomotorischen Kraft entsprechend Gl. (5) wird auch das ponderomotorische Drehmoment nach der folgenden, allgemeingültigen und in der Mechanik schon immer angewendeten Methode berechnet: Das ponderomotorische Drehmoment muß gleich dem Moment der an einem Körper (also einem körperlichen, „physikalisch“ begrenzten Materiebereich!) direkt (körperfest) angreifenden Kräfte sein, zuzüglich des Drehmomentes, das die durch die umgebende Materie an seiner Oberfläche angreifenden Auftriebskräfte hervorrufen:

$$\mathfrak{T}_{\text{pond}} = \mathfrak{T}_{(\text{ph})} + \mathfrak{T}_{\text{Auftr.}} \quad (72)$$

Nun wurde schon in <sup>38</sup> (Kap. VIII/1) erwähnt, daß die auf anderem Wege, nämlich aus dem Energieprinzip gewonnenen Maxwellischen ponderomotorischen Kräfte zur Voraussetzung haben, daß man die bei einer virtuellen Verschiebung auftretende Energieänderung in ein Volums- oder ein Oberflächenintegral über den Körper allein umzuwandeln vermag. Dies bedeutet eine empfindliche Einschränkung bei der Anwendung der Maxwellischen Ausdrücke, und zwar auf die Fälle, in denen sich die Materie unabhängig von der umgebenden verschieben läßt, also im wesentlichen auf einen in homogener (flüssiger oder gasförmiger), von „wahren“ Ladungen freier Materie befindlichen Körper. Die Übereinstimmung des nach der allgemeinen Beziehung Gl. (72) berechneten ponderomotorischen Drehmomentes mit dem der Maxwellischen Theorie wird sich also prinzipiell nur in diesem Fall zeigen lassen. In der umgebenden Materie rufen die dort körperfest angreifenden elektrischen Feldkräfte einen zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes nötigen mechanischen Spannungszustand hervor. Dieser läßt sich aus einem (hydrostatischen, aerostatischen) Druck  $p$  ableiten, so daß die Gleichgewichtsbedingung für die umgebende Materie

$$\mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathfrak{f}^{(\text{mech})} = \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} - \text{grad } p = 0 \quad (73)$$

<sup>37</sup> S. Fußnote 1, S. 286.

<sup>38</sup> S. Fußnote 8, S. 287.

lautet. Für die im ladungsfreien, homogenen Medium herrschenden Volumskräfte  $\mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el})}$  ergibt sich wegen  $\varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})} = 0$  und  $\varepsilon = \text{konst.}$  und unter Berücksichtigung der im elektrostatischen Feld gültigen Bedingung

$$\text{rot } \mathfrak{E} = \nabla \times \mathfrak{E} = 0 \quad (74)$$

nach Gl. (30)

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} &= (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} = (\varepsilon - 1) (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E} = (\varepsilon - 1) \{ \nabla (\mathfrak{E} \mathfrak{E}_e) - \mathfrak{E} \times (\nabla \times \mathfrak{E}) \} = (\varepsilon - 1) \nabla (\mathfrak{E} \mathfrak{E}_e) = \\ &= (\varepsilon - 1) \nabla \frac{\mathfrak{E}^2}{2} = \nabla \frac{(\varepsilon - 1) \mathfrak{E}^2}{2} - \frac{\mathfrak{E}^2}{2} \nabla (\varepsilon - 1) = \nabla \frac{(\mathfrak{P} \mathfrak{E})}{2} - \frac{\mathfrak{E}^2}{2} \nabla \varepsilon = \nabla \frac{(\mathfrak{P} \mathfrak{E})}{2} = \text{grad } \frac{(\mathfrak{P} \mathfrak{E})}{2}. \end{aligned} \quad (75)$$

Aus den Gln. (73) und (75) folgt weiterhin

$$\text{grad} \left\{ \frac{\mathfrak{P} \mathfrak{E}}{2} - p \right\} = 0 \quad (76)$$

und daraus nach Integration der in dem umgebenden Medium herrschende Druck

$$p = \frac{\mathfrak{P} \mathfrak{E}}{2} + C, \quad (77)$$

so daß das Drehmoment der Auftriebskräfte

$$\mathfrak{T}_{\text{Auftr.}} = \oint_A \mathbf{r} \times (-\mathbf{n}) \left\{ \frac{\mathfrak{P} \mathfrak{E}}{2} + C \right\} dA \quad (78)$$

wird.

Die vom Orte unabhängige Integrationskonstante  $C$  wäre aus den Randbedingungen zu bestimmen. Sie hat aber auf das resultierende Drehmoment keinen Einfluß, da der durch sie bestimmte, an der Oberfläche des Körpers angreifende konstante Druckanteil  $-C \mathbf{n}$  wegen

$$\text{rot } \mathbf{r} = \nabla \times \mathbf{r} = 0 \quad (79)$$

kein resultierendes Drehmoment hervorruft:

$$\oint_A \mathbf{r} \times (-C \mathbf{n}) dA = C \oint_A dA \mathbf{n} \times \mathbf{r} = C \int_V dV \nabla \times \mathbf{r} = 0. \quad (80)$$

Das ponderomotorische Drehmoment Gl. (72) wird demnach im elektrischen Feld unter Benützung des Oberflächenintegrals Gl. (57) für das körperfeste Drehmoment und unter Verwendung der Resultate Gl. (78) und Gl. (80)

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} &= \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathfrak{T}_{\text{Auftr.}} = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} \mathbf{n}) dA + \oint_A \mathbf{r} \times (-\mathbf{n}) \left\{ \frac{\mathfrak{P} \mathfrak{E}}{2} + C \right\} dA = \\ &= \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left( \mathfrak{E}; \mathfrak{D} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{n} \right\} dA + \oint_A \mathbf{r} \times \left( -\mathbf{n} \frac{(\mathfrak{P} \mathfrak{E})}{2} \right) dA = \\ &= \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left( \mathfrak{E}; \mathfrak{D} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \mathbf{I} - \frac{1}{2} (\mathfrak{P} \mathfrak{E}) \mathbf{I} \right) \mathbf{n} \right\} dA = \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left( \mathfrak{E}; \mathfrak{D} - \frac{1}{2} (\mathfrak{D} \mathfrak{E}) \mathbf{I} \right) \mathbf{n} \right\} dA. \end{aligned} \quad (81)$$

Der in der letzten Form von Gl. (81) auftretende Tensor ist nun der klassische Maxwell'sche Spannungstensor Gl. (69), das aus der allgemeinen Beziehung Gl. (72) abgeleitete bewegende Drehmoment stimmt also mit dem Moment der Maxwell'schen ponderomotorischen Spannungen  $\mathfrak{p}_{\text{pond}}^{(\text{el})}$  überein:

$$\mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} \mathbf{n}) dA = \oint_A \mathbf{r} \times \mathfrak{p}_{\text{pond}}^{(\text{el})} dA. \quad (82)$$

Damit ist auch geklärt, daß das Moment der Maxwell'schen ponderomotorischen Volumskräfte  $\mathfrak{f}_{\text{pond}}^{(\text{el})}$  wegen der Unsymmetrie des klassischen Maxwell-Tensors allein nicht das richtige ponderomotorische Drehmoment liefern kann. Vielmehr läßt sich das ponderomotorische Drehmoment unter Verwendung des Volumsintegrals Gl. (32) für das körperfeste Drehmoment und durch Umformung des Momentes der Auftriebs-



kräfte Gl. (78) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes auf folgende Weise in ein Volumsintegral umwandeln:

$$\begin{aligned}
 (72), (32), (78), (79): \quad \mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} &= \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathfrak{T}_{\text{Auftr.}} = \\
 &= \int_V \{ \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} \} dV + \oint_A \mathbf{r} \times (-\mathbf{n}) \left\{ \frac{\mathfrak{P} \mathfrak{E}}{2} + C \right\} dA = \\
 &= \int_V \{ \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} \} dV + \oint_A dA \mathbf{n} \frac{(\mathfrak{P} \mathfrak{E})}{2} \times \mathbf{r} = \\
 &= \int_V \{ \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{\mathfrak{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{el})}) + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} \} dV + \int_V dV \nabla \frac{(\mathfrak{P} \mathfrak{E})}{2} \times \mathbf{r} = \\
 &= \int_V \left( \mathbf{r} \times \left\{ \nabla \left( \mathfrak{D}; \mathfrak{E} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \mathbf{I} \right) \right\} + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} \right) dV - \int_V \mathbf{r} \times \nabla \frac{(\mathfrak{P} \mathfrak{E})}{2} dV + \int_V \frac{(\mathfrak{P} \mathfrak{E})}{2} \nabla \times \mathbf{r} dV. \quad (83)
 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (79) folgt mit Gl. (67)

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} &= \int_V \left( \mathbf{r} \times \left\{ \nabla \left( \mathfrak{D}; \mathfrak{E} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \mathbf{I} - \frac{1}{2} (\mathfrak{P} \mathfrak{E}) \mathbf{I} \right) \right\} + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} \right) dV = \\
 &= \int_V \{ \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{\mathfrak{T}}_{\text{pond}}^{(\text{el})}) + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} \} dV = \int_V (\mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{\text{pond}}^{(\text{el})} + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E}) dV. \quad (84)
 \end{aligned}$$

Die Umwandlung des ponderomotorischen Drehmomentes in ein Volumsintegral führt also auf die gleiche Form wie die der Gl. (32) für das körperfeste Drehmoment: Es ist das ponderomotorische Drehmoment wieder durch das Moment der ponderomotorischen Volumskräfte zuzüglich des Momentes der bei anisotroper Materie im Körperinneren auftretenden Kräftepaare gegeben. Dieses Resultat war auf Grund der vorangegangenen Ausführungen über das körperfeste Drehmoment zu erwarten und überrascht daher jetzt nicht weiter; es klärt aber die Frage, welche der beiden Darstellungen, diejenige mit Hilfe der Maxwellschen ponderomotorischen Volumskräfte oder die andere mit Hilfe der Maxwellschen Spannungen direkt durch Integration auf das richtige Resultat führt: Es ist dies also die Darstellung mit Hilfe der Maxwellschen Spannungen Gl. (68), die direkt durch Integrale über die Oberfläche des betrachteten Körpers die resultierende ponderomotorische Kraft

$$\mathfrak{F}_{\text{pond}}^{(\text{el})} = \oint_A \mathfrak{p}_{\text{pond}}^{(\text{el})} dA = \oint_A \mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} \mathbf{n} dA \quad (85)$$

und das resultierende, ponderomotorische Drehmoment

$$(82) \quad \mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} = \oint_A \mathbf{r} \times \mathfrak{p}_{\text{pond}}^{(\text{el})} dA = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} \mathbf{n}) dA \quad (86)$$

liefert. Die ponderomotorischen Volumskräfte Gl. (67) führen wohl auch durch Integration über das Volumen direkt auf die bewegende Kraft

$$\mathfrak{F}_{\text{pond}}^{(\text{el})} = \int_V \mathfrak{f}_{\text{pond}}^{(\text{el})} dV = \int_V \nabla \tilde{\mathfrak{T}}_{\text{pond}}^{(\text{el})} dV, \quad (87)$$

sie liefern aber allein nicht das richtige ponderomotorische Drehmoment, das vielmehr durch

$$(84) \quad \mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{el})} = \int_V (\mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{\text{pond}}^{(\text{el})} + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E}) dV = \int_V \{ \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{\mathfrak{T}}_{\text{pond}}^{(\text{el})}) + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} \} dV \quad (88)$$

gegeben ist. Es löst sich damit schon hier das vorwiegend im Magnetfeld behandelte und bisher in allgemeiner Form nicht geklärte Problem, ob und wie weit die aus dem klassischen Maxwell-Tensor abgeleiteten Ausdrücke im Falle anisotroper Materie ihre Gültigkeit behalten (vgl. <sup>39</sup>): Die Anwendung der Maxwellschen Spannungen

<sup>39</sup> S. Fußnote 1, S. 286.

ist auch beim anisotropen Körper erlaubt und führt unmittelbar, im Gegensatz zu den Maxwell'schen ponderomotorischen Volumskräften, auf das richtige ponderomotorische Drehmoment.

Abschließend zu diesem Kapitel soll noch, mehr zur Kontrolle, der Nachweis erbracht werden, daß das ponderomotorische Drehmoment für den vom Vakuum umgebenen Körper direkt gleich dem körperfesten Drehmoment wird. Diese Übereinstimmung ist erforderlich, da ein Moment von Auftriebskräften mangels solcher nicht vorhanden sein kann und daher aus Gl. (72) in diesem Fall

$$\mathfrak{D}_{\text{pond}, 0}^{(\text{el})} = \mathfrak{D}_{(\text{ph}) 0}^{(\text{el})} \quad (89)$$

folgt. Die Gültigkeit der Beziehung Gl. (89) erweist sich sofort, wenn man die beiden Drehmomente in der Darstellung der Oberflächenintegrale Gl. (57) und Gl. (82) miteinander vergleicht und wegen der im Vakuum verlaufenden Hüllfläche in den Tensoren die Beziehung

$$\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{E}_0 \quad (90)$$

berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\text{pond}, 0}^{(\text{el})} &= \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{\text{pond}, 0}^{(\text{el})} \mathbf{n}) dA = \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left( \mathfrak{E}_0; \mathfrak{D}_0 - \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_0 \mathfrak{E}_0) \mathbf{I} \right) \mathbf{n} \right\} dA = \\ &= \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left( \mathfrak{E}_0; \mathfrak{D}_0 - \frac{1}{2} \mathfrak{E}_0^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{n} \right\} dA = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph}) 0}^{(\text{el})} \mathbf{n}) dA = \mathfrak{D}_{(\text{ph}) 0}^{(\text{el})}. \end{aligned} \quad (91)$$

Hier führt natürlich auch das Moment  $\mathfrak{D}_{(\text{m}) 0}^{(\text{el})}$  der allein an den räumlich verteilten „freien“ Ladungen angreifenden Kräfte auf dasselbe Resultat, da die im Vakuum verlaufende Hüllfläche diesmal auch bei „mathematischer“ Bereichsabgrenzung alle Ladungen des Körpers richtig erfaßt. Dieser Nachweis wurde bereits in Kap. III/A erbracht.

Im II. Teil dieser Arbeit werden die analogen Untersuchungen im stationären Magnetfeld durchgeführt und schließlich wird das allgemeine, nichtstationäre elektromagnetische Feld behandelt.

(Eingegangen am 14. Dezember 1957)

## Stationäre Laminarströmung durch Kreis- und Kreisringrohre mit fester bzw. beweglicher Innenwandung und bei statischer Druckverteilung\* \*\*

Von K. Karas, Darmstadt

Mit 5 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Die Geschwindigkeitsverteilung und die sekundliche Durchflußmenge bei Laminarströmungen durch Kreis- und Kreisringrohre mit irgendwie gegebenem Druckgefälle können mittels des angegebenen Membrangleichnisses durch die Auswölbung einer Membran dargestellt werden, die gleichförmig durch irgendeine Spannung  $S$  vorgespannt ist und durch einen dem Druckgefälle analog entsprechenden Flächendruck belastet ist. Man erhält dann das Geschwindigkeitsrelief der Laminarströmung bzw. die sekundliche Durchflußmenge derselben, wenn man die Auslenkung bzw. das Volumen des Wölbhügels mit der Konstanten  $S/\kappa \cdot l$  multipliziert, wobei  $\kappa$  die dynamische Zähigkeit und  $l$  die Rohrlänge des laminar durchströmten Rohres bedeuten. Ist die Auslenkung in dimensionsloser Weise dargestellt, so braucht man nur die Konstante  $\alpha$  durch  $\beta$  zu ersetzen, um statt der Isohypsen des Membranwölbhügels die Isotachen des Geschwindigkeitsreliefs zu erhalten.

\* Dem Gedenken an Herrn Dr. Ing. Camillo Körner, weiland o. ö. Professor für Strömungsmaschinen an der ehemaligen Deutschen Technischen Hochschule in Prag, gewidmet.

\*\* Bei der Abfassung der Zeichnungen wurde Verf. von Herrn Dipl.-Ing. K. E. Meier-Dörnberg in dankenswerter Weise unterstützt.

Dieses Gleichnis, das in analoger Weise wohl auch für andere Querschnitte Gültigkeit hat, bietet neben seiner großen Anschaulichkeit einen bedeutsamen Vorteil in experimenteller Hinsicht, nämlich bei Ausmessung des Geschwindigkeitsreliefs einer Laminarströmung. Es ersetzt diese experimentell schwierige kinematische Ausmessung durch die viel einfacher durchführbare, rein statische Ausmessung des Membranwölbhügels. Umgekehrt kann durch die relativ leicht bestimmbare sekundliche Durchflußmenge der Laminarströmung die im allgemeinen viel zeitraubendere Kubatur des Wölbhügels ersetzt werden.

Da Trägheitsglieder nicht berücksichtigt worden sind, gilt das Gleichnis natürlich nur für die sog. „schleichenden Bewegungen“, die durch verhältnismäßig niedrige Reynoldssche Zahlen gekennzeichnet sind.

## I. Laminarströmung und Membrangleichnis

Auf das in Abb. 1 dargestellte Flüssigkeitsprisma von der Länge  $l$  wirkt auf seine linke Stirnfläche der Gesamtdruck  $p(r, \varphi) \cdot r d\varphi dr$ , während die rechte Stirnfläche keine oder nur eine vernachlässigbar kleine Druckkraft empfangen soll. Die vier

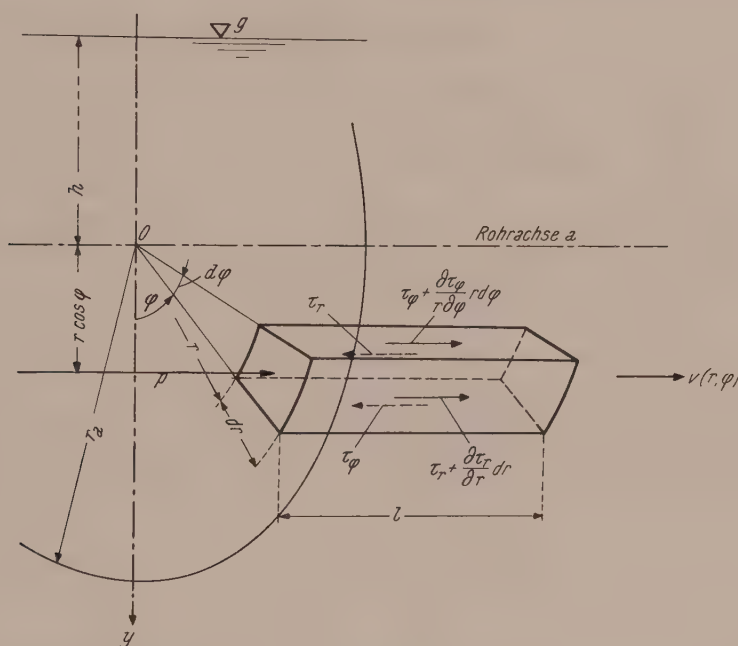


Abb. 1. Ein Flüssigkeitsprisma mit dem Einheitsdruck  $p(r, \varphi)$  an seiner linken Stirnfläche und den eingezeichneten Schubspannungen  $\tau$  an seinen vier Mantelflächen. Die Strömung erfolgt parallel zur horizontalen Rohrachse  $a$

Mantelflächen empfangen Schubspannungen  $\tau_r$  bzw.  $\tau_\varphi$ , wobei der Zeiger  $r$  auf die beiden Flächen hinweisen soll, deren Normalen die Richtung  $r$  besitzen, und analog der Zeiger  $\varphi$  auf jene Flächen, deren Normalen auf den zugehörigen  $r$ -Richtungen senkrecht stehen. Dann gilt nach dem Ansatz von Newton mit  $\kappa$  als dynamischer Zähigkeit:

$$\tau_r = \kappa \frac{\partial v}{\partial r}; \quad \tau_\varphi = \kappa \frac{\partial v}{r \partial \varphi}. \quad (1a, b)$$

Hierin bedeutet  $v(r, \varphi)$  die gesuchte Geschwindigkeit parallel  $l$ , also parallel zur Rohrachse  $a$ .

Die Richtungen von  $\tau_r$  und  $\tau_\varphi$  auf den durch  $r$  und  $\varphi$  gekennzeichneten Mantelflächen sind wie üblich in der Richtung  $-v$ , ihr Zuwachs auf den durch  $r + dr$  bzw.



$\varphi + d\varphi$  gekennzeichneten Mantelflächen, jedoch in Richtung  $+v$  angenommen worden.

Setzt man voraus, daß das Rohr horizontal ist (die Verallgemeinerung bei schiefer Rohr soll später gezeigt werden), so ergibt das Gleichgewicht des Flüssigkeitsprismas wegen der vorausgesetzten stationären Strömung:

$$-\tau_r r d\varphi l + \left(\tau_r + \frac{\partial \tau_r}{\partial r} dr\right) (r + dr) d\varphi l - \tau_\varphi dr l + \left(\tau_\varphi + \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial \varphi} r d\varphi\right) dr l + p r d\varphi dr = 0.$$

Nach Ausführung der angezeigten Multiplikationen sowie nach Teilung durch den nicht verschwindenden Faktor  $l dr d\varphi$  erhält man:

$$\tau_r + r \frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial \varphi} + \gamma \frac{p}{l \gamma} r = 0. \quad (2)$$

Hierin bedeutet  $\gamma$  das Einheitsgewicht der Flüssigkeit. Führt man (1a, b) in (2) ein, so erhält man mit

$$J(r, \varphi) = \frac{p(r, \varphi)}{\gamma \cdot l}; \quad (3)$$

als ortsveränderlichem Druckgefälle bzw. kinematischer Zähigkeit<sup>1</sup>  $\kappa/\varrho$  die Gleichung:

$$\frac{\kappa}{\varrho} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) + J g r = 0. \quad (4)$$

Durch (4) wird  $v(r, \varphi)$  bestimmt. Nennt man  $v_s$  die etwa vorgegebene oder erst zu bestimmende Geschwindigkeit der inneren Rohrwandung mit dem Halbmesser  $r_i$ , so ergibt sich aus (4) die sekundliche Durchflußmenge  $Q$  zu:

$$Q = 2 \int_{r_i}^{r_a} \int_0^\pi v r d\varphi dr + v_s r_i^2 \pi. \quad (5)$$

<sup>1</sup> Man vergleiche hierzu etwa das „Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik“, herausgegeben von F. Auerbach und W. Hort, Bd. 3, 1. Teil, 1927, Artikel: „Elastische Schwingungen und Wellen“ von F. Auerbach, S. 283–386, insbesondere S. 355, wo für die Schwingungsauslenkung kreisförmiger Membranen [Gl. (145) ebendort] die Differentialgleichung angegeben ist:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r^2} \left[ (\partial \ln r)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right]$$

mit  $a^2 = \frac{S}{\varrho \delta}$ , wo  $\varrho$  die räumliche Dichte und  $\delta$  die Dicke der Membran bedeutet. Da  $\frac{\partial w}{\partial \ln r} = r \frac{\partial w}{\partial r}$  ist, so folgt hieraus

$$\varrho \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right).$$

Ersetzt man die linke Seite dieser Gleichung, nämlich die Trägheitskraft  $\varrho \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  durch  $-p$ , da  $\varrho \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  die Richtung  $-w$ ,  $p$  jedoch in (6) die Richtung  $+w$  besitzt, so erhält man nach Erweiterung mit  $r$  sofort Gl. (6).

Gl. (4) kann wegen  $J = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z}$  gemäß (3) und nach Multiplikation mit  $\frac{\varrho}{r}$  auch umgeformt werden in

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \kappa \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) = 0$$

und stimmt dann überein mit Gl. (3, 33c) in H. Schlichting, Grenzschicht-Theorie, 1951, S. 47, wenn man dort wegen des Fehlens von Raumkräften in Richtung  $z$  der Rohrachse  $K_z = 0$  setzt und außerdem die linke Seite dieser Gleichung wegen des hier vorausgesetzten laminaren und stationären Charakters der Strömung streicht. Man vergleiche auch W. Müller, Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, 1932, S. 29, Gln. (7) mit  $v_z$  statt  $\Phi$  und (9), letzte Gleichung mit  $k_z = 0$ , wobei in (7) ebendort natürlich der Term  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$  wegfällt.

Liegt ein Vollkreisquerschnitt vor, so ist in (5)  $r_i = 0$  zu setzen:

$$Q = 2 \int_0^{r_a} \int_0^\pi v r d\varphi dr. \quad (5a)$$

Andererseits genügt die Auslenkung  $w(r, \varphi)$  einer mit der Spannkraft  $S$  kp/cm homogen gespannten Kreis- oder Kreisringmembran, die durch den Flächendruck  $p(r, \varphi)$  belastet ist, der Differentialgleichung<sup>1</sup>:

$$S \left( \frac{\partial w}{\partial r} + r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + p r = 0, \quad (6)$$

während das Volumen ihres Wölbhügels mit  $w_s$  als etwa vorgegebener oder erst zu bestimmender Auslenkung des Innenrandes der Kreisringmembran mit dem Halbmesser  $r_i$  durch

$$V = 2 \int_{r_i}^{r_a} \int_0^\pi w r d\varphi dr + w_s r_i^2 \pi \quad (7)$$

bestimmt wird, das für Vollkreismembranen wegen  $r_i = 0$  sich zu

$$V = 2 \int_0^{r_a} \int_0^\pi w r d\varphi dr \quad (7a)$$

vereinfacht. Der Vergleich der Gl. (4) und (6) einerseits und der Gln. (5) bzw. (5a) mit (7) bzw. (7a) führt zu dem folgenden

### Membrangleichnis:

Liegt eine laminare Flüssigkeitsströmung durch ein horizontales Rohr der Länge  $l$  unter dem Druckgefälle  $J = p(r, \varphi)/\gamma l$  vor, so wird das Geschwindigkeitsrelief  $v(r, \varphi)$  bzw. die sekundliche Durchflußmenge  $Q$  derselben anschaulich durch die Auswölbung  $w(r, \varphi)$  bzw. das Volumen  $V$  des Wölbhügels einer durch den Flächendruck  $p(r, \varphi)$  belasteten und mittels  $S$  homogen gespannten Membran dargestellt, und zwar erhält man  $v(r, \varphi)$  aus  $w(r, \varphi)$  bzw.  $Q$  aus  $V$  nach Multiplikation mit der Konstanten  $S/\kappa l$ :

$$v(r, \varphi) = w(r, \varphi) \frac{S}{\kappa l}; \quad Q = V \frac{S}{\kappa l}; \quad \left[ \frac{S}{\kappa l} \right] = T^{-1}. \quad (8a, b)$$

Denn ist in (4) und (6) der Faktor der Klammerausdrücke jeweils gleich 1, so erkennt man, daß der Faktor von  $r$  in (4), nämlich wegen (3) der Faktor:

$$\frac{J g \cdot \varrho}{\kappa} = \frac{p}{\gamma l} \cdot \frac{\gamma}{\kappa} = \frac{p}{\kappa l}$$

aus dem von (6), nämlich  $\frac{p}{S}$  durch Multiplikation mit  $\frac{S}{\kappa l}$  erhalten wird<sup>2</sup>.

## II. Laminarströmungen mit statischer Druckverteilung

Im folgenden sollen die gestellten Strömungsaufgaben mittels des anschaulichen Bildes ausgelenkter Membranen gelöst werden<sup>3</sup>. Liegt insbesondere hydrostatische Druckverteilung  $p(r, \varphi)$  vor, so kann letztere in einen konstanten, im Membranmittel-

<sup>2</sup> Das hier ausgesprochene Membrangleichnis, das in sehr anschaulicher Weise die Strömungsgeschwindigkeiten  $v$  direkt den Verschiebungen  $w$  der Membran zuordnet, ist verwandt mit der Tatsache, daß man das Stokessche Reibungsgesetz aus dem Hookeschen Elastizitätsgesetz durch Ersatz der Formänderungen durch die Formänderungsgeschwindigkeiten erhält. Man vgl. hierzu: H. Schlichting: Grenzschicht-Theorie, S. 44. 1951.

<sup>3</sup> Hierbei kann man sich in weitem Maße der Ergebnisse einer früheren Arbeit des Verfassers: Die Auswölbungen der Kreis- und Kreisringmembranen unter hydrostatischem Druck, erste Mitteilung: Homogener Spannungszustand, Ingenieur-Arch. 25, 359—380 (1957), bedienen. Diese Arbeit soll kurz durch „I“ zitiert werden.

punkt  $O$  wirkenden Druck  $p' = \gamma h$  mit der hydrostatischen Druckhöhe  $h$  und in einen antimetrischen Druckanteil  $p'' = \gamma r \cos \varphi$  (Abb. 1) aufgespalten werden, denen bezüglich die Membranauslenkungen  $w'(r)$  und  $w''(r, \varphi)$  entsprechen.  $w'$  bzw.  $w''$  genügen den beiden Differentialgleichungen:

$$[I (4a), (8)]: \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw'}{dr} \right) + \frac{\gamma h}{S} r = 0; \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w''}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w''}{\partial \varphi^2} + \frac{\gamma \cos \varphi}{S} r^2 = 0. \quad (9a, b)$$

Den Gl. (9a, b) entsprechen die Lösungen

$$[I (25), (12)]: \quad w' = -\frac{\gamma h}{4S} r^2 + C_1 \ln r + C_2; \quad w'' = \left( -\frac{\gamma}{8S} r^3 + D_1 r + \frac{D_2}{r} \right) \cos \varphi. \quad (10a, b)$$

Die Integrationskonstanten  $C$  und  $D$  müssen aus den Bedingungen des jeweiligen Strömungsproblems berechnet werden. Wegen der Linearität der Auslenkungsgleichungen (9a, b) ergibt sich dann die Gesamtauslenkung  $w$  zu:

$$w(r, \varphi) = w'(r) + w''(r, \varphi). \quad (11)$$

Zum Volumen  $V$  des Wölbhügels trägt der antimetrische Teil  $w''$  nach (10b) nichts bei, so daß sich mit (9a) das Volumen  $V$  nach (7) für Kreisringmembranen bzw. nach (7a) für Vollmembranen berechnet, wenn man jetzt nachträglich dort  $w(r, \varphi)$  durch  $w'(r)$  ersetzt.

Anschließend sollen vier Fälle von Laminarströmungen infolge statischer Druckverteilung berechnet werden, von denen sich der erste auf ein Kreisrohr, die drei anderen auf Kreisringrohre beziehen. Die Lösungen der beiden ersten Fälle konnten unmittelbar der Arbeit (I) entnommen werden, während die der beiden letzten Fälle sich wenigstens teilweise auf die Ergebnisse jener Arbeit stützen und daher nur geringe zusätzliche Rechenarbeit erfordern.

### III. Vier Zahlenbeispiele

#### a) Strömung durch ein Kreisrohr

Es ergab sich [I (6), (13)]

$$w' = \frac{\gamma h}{4S} (r_a^2 - r^2); \quad w'' = \frac{\gamma}{8S} r (r_a^2 - r^2) \cos \varphi \quad (12a, b)$$

und somit  $w$  nach (11) [I, (14)]

$$w = \frac{\gamma}{8S} (r_a^2 - r^2) (2h + r \cos \varphi). \quad (13)$$

Für konstante Auslenkung  $w = w_c$  ergeben sich (Abb. 2) zirkuläre Kurven 3. Ordnung [I (18)] als Gleichungen für die Höhenlinien

$$(x^2 + y^2) (y + 2h) - r_a^2 y + \frac{8S w_c}{\gamma} - 2h r_a^2 = 0, \quad (14)$$

von denen nur die Ovale innerhalb der Membranfläche in Frage kommen. Der Membranmittelpunkt ist außerordentlicher Brennpunkt. Aus (12a) erhält man nach (7a):

$$[I (22a)] \quad V = \frac{\pi}{8} \frac{\gamma h r_a^4}{S}. \quad (15)$$

Aus (12a) und (15) kann man nach (8a, b) die Geschwindigkeitsverteilung  $v'(r)$  und die sekundliche Durchflußmenge  $Q$  sofort durch die der Strömung entsprechenden Größen ausdrücken und erhält für den achsensymmetrischen Anteil

$$\left. \begin{aligned} v'(r) &= w' \frac{S}{\pi l} = \frac{\gamma h}{4\pi l} (r_a^2 - r^2) = \frac{J \gamma}{4\pi} (r_a^2 - r^2), \\ Q &= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\gamma h r_a^4}{\pi l} = \frac{\pi}{8} \frac{\gamma J r_a^4}{\pi} \quad \text{mit} \quad J = \frac{h}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (16a, b)$$



Ist nämlich  $p = \gamma h$  konstant, so ergibt sich aus (3) sofort  $J = h/l$ . Es soll weiterhin die erstere Schreibweise beibehalten werden. Im allgemeinen empfiehlt sich in Anlehnung an die anderen Fälle die Beibehaltung von Polarkoordinaten  $r, \varphi$  und die Einführung dimensionsloser Größen gemäß:

$$\varrho = \frac{r}{r_a}; \quad \mu = \frac{r_a}{r_i}; \quad \frac{r}{r_i} = \varrho \mu; \quad \frac{h}{r_a} = \nu; \quad \frac{w' S}{\gamma r_a^3} \text{ bzw. } \frac{w S}{\gamma r_a^3} = \frac{\alpha}{8};$$

$$\frac{v' \kappa l}{\gamma r_a^3} \text{ bzw. } \frac{v \kappa l}{\gamma r_a^3} = \frac{\beta}{8}. \quad (17a, b, c, d, e, f)$$

Dann erhält man aus (12a) bzw. (13)

$$\left. \begin{aligned} w' &= \nu(1 - \varrho^2) \frac{\gamma r_a^3}{4S} \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha}{2} = \nu(1 - \varrho^2); \\ w &= (1 - \varrho^2)(2\nu + \varrho \cos \varphi) \frac{\gamma r_a^3}{8S} \quad \text{oder} \quad \alpha = (1 - \varrho^2)(2\nu + \varrho \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (18a, b)$$

Analog hat man nach (17f) und (16a):

$$\left. \begin{aligned} v' &= \nu(1 - \varrho^2) \frac{\gamma r_a^3}{4\kappa l} \quad \text{oder} \quad \frac{\beta}{2} = \nu(1 - \varrho^2); \\ v &= (1 - \varrho^2)(2\nu + \varrho \cos \varphi) \frac{\gamma r_a^3}{8\kappa l} \quad \text{oder} \quad \beta = (1 - \varrho^2)(2\nu + \varrho \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (19a, b)$$

Erteilt man den Größen  $w'$  bzw.  $w$  in (18) oder  $v'$  bzw.  $v$  in (19) bestimmte konstante Werte  $w_c'$  bzw.  $w_c$  und  $v_c'$  bzw.  $v_c$  oder den Größen  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmte konstante Werte, so sind durch (18) und (19) die Schichtenlinien der Auslenkungen bzw. Geschwindigkeitsverteilungen in dimensionslosen Veränderlichen oder Größen dargestellt. Letztere (19a, b) werden auch Isotachen genannt.

Analog erhält man aus (15) und (8b):

$$V = \frac{\pi}{8} \nu \frac{\gamma r_a^5}{S}; \quad Q = \frac{\pi}{8} \nu \frac{\gamma r_a^5}{\kappa l} = 0.393 \frac{\gamma r_a^5}{\kappa l} \text{ mit } \nu = 1. \quad (20a, b)$$

In Abb. 2 sind die Höhenlinien nach (18b) für  $\nu = 1$  und die dort angegebenen Werte  $\alpha$  sowie auch ein vertikaler Meridianschnitt durch die Wölfläche angegeben. Man vergleiche in I die Tabelle 1, S. 365. Man braucht bloß die Größe  $\alpha$  durch  $\beta$  zu ersetzen, um Abb. 2 sogleich als Darstellung des Geschwindigkeitsreliefs durch Schichtenlinien auffassen zu können. Auch alle weiteren Folgerungen über den Ort des Wölbmaximums  $m$  und Druckmittelpunktes  $M$  behalten auch für das Strömungsproblem ihre sinngemäße Gültigkeit. In (16a) erkennt man das bekannte Geschwindigkeitsverteilungsgesetz und in (16b) das Hagen-Poiseuillesche Gesetz für laminare Kreisrohrströmung bei konstantem Druck  $\gamma h$  wieder. Für hydrostatisch verteilten Druck ist jedoch durch (19b) ein neues Geschwindigkeitsverteilungsgesetz angegeben, während das Hagen-Poiseuillesche Gesetz auch für diesen Fall ungeändert bleibt.

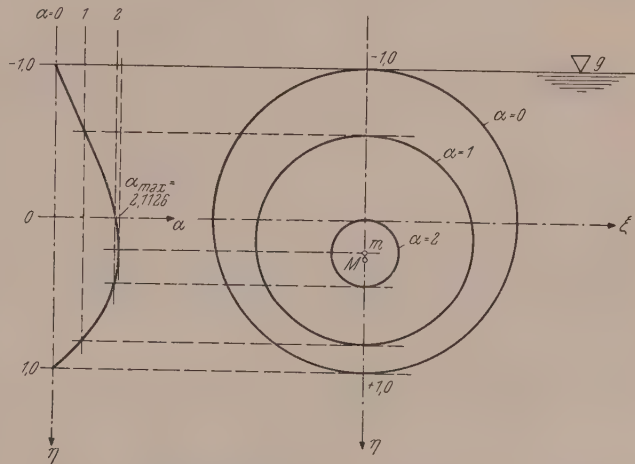


Abb. 2. Die Höhenlinien der Wölfläche der Vollkreismembran unter hydrostatischem Druck für die durch die Werte  $\alpha$  gegebenen Höhenlagen der zur Basis der Wölfläche parallelen Schnittebenen

## B. Strömung durch ein Kreisringrohr

Es ergab sich [I (27), (32)]:

$$\left. \begin{aligned} w' &= \frac{\gamma h}{4 S \ln \frac{r_a}{r_i}} \left( -r^2 \ln \frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \ln \frac{r}{r_i} + r_i^2 \ln \frac{r_a}{r} \right), \\ w'' &= \frac{\gamma}{8 S} \left[ -r^3 + (r_a^2 + r_i^2) r - \frac{r_a^2 r_i^2}{r} \right] \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (21a, b)$$

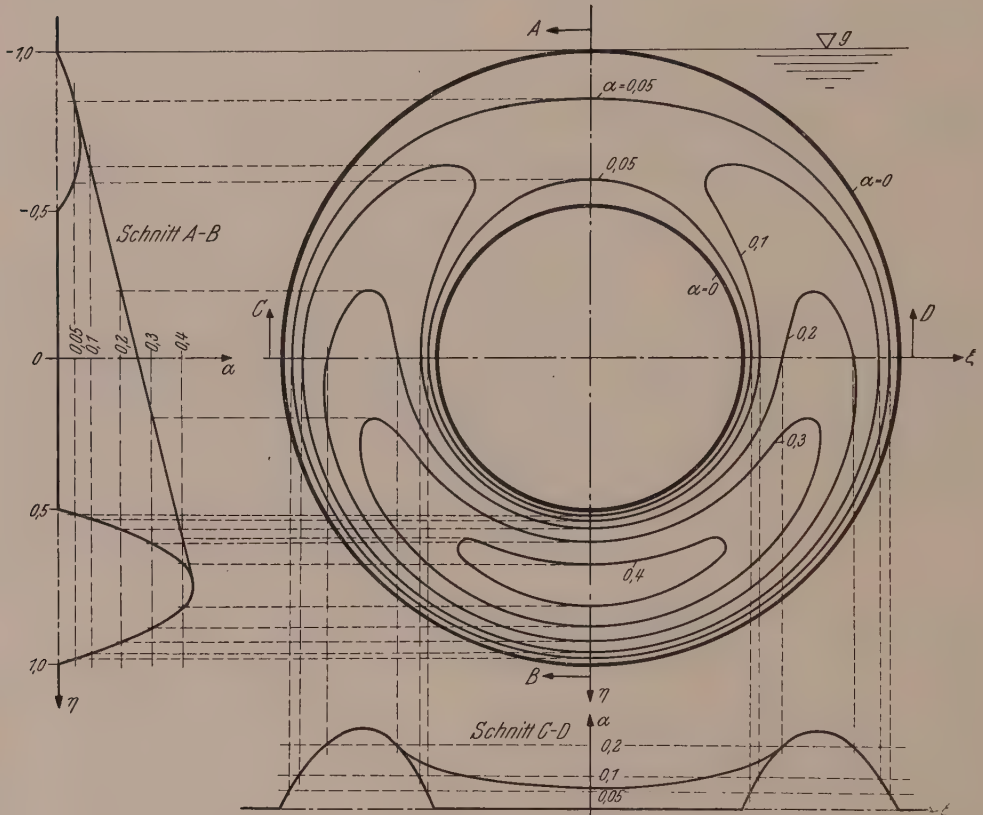


Abb. 3. Die Höhenlinien der Wölfläche der Kreisringmembran mit fester Innenkreisplatte unter hydrostatischem Druck für die durch die Werte  $\alpha$  gegebenen Höhenlagen der zur Basis der Wölfläche parallelen Schnittebenen

woraus nach (11) sofort  $w = w' + w''$  folgt. Aus (21a) folgt im Verein mit (7), worin aber wegen des festen Innenmantels  $w_s = 0$  zu setzen ist [I (40)]:

$$V = \frac{\pi \gamma h}{8 S \ln \frac{r_a}{r_i}} [(r_a^4 - r_i^4) \ln \frac{r_a}{r_i} - (r_a^2 - r_i^2)^2]. \quad (22)$$

Aus (21a) ergibt sich nach Multiplikation mit  $S/\pi l$  das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz und aus (22) ebenso die sekundliche Durchflußmenge, die zu konstantem Druck  $\gamma h$  und festen Rohrwandungen gehören. Bei hydrostatisch verteiltem Druck  $p = \gamma (h + r \cos \varphi)$  ändert sich jedoch das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz, das mittels (17) sogleich in dimensionslosen Größen angegeben werden soll. Man erhält:

$$\beta = \frac{2 \nu}{\ln \mu} \left[ -\varrho^2 \ln \mu + \ln (\varrho \mu) - \frac{1}{\mu^2} \ln \varrho \right] + \left[ -\varrho^3 + \left( 1 + \frac{1}{\mu^2} \right) \varrho - \frac{1}{\mu^2 \varrho} \right] \cos \varphi. \quad (23)$$

Dieses Ergebnis folgt aus I (33) sofort mit Beachtung von (8a). Ebenso erhält man aus (22) mit (8b) mit  $\nu = 1$  und  $m = 2$ :

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{\nu}{\mu^4 \ln \mu} [(\mu^4 - 1) \ln \mu - (\mu^2 - 1)^2] \frac{\gamma r_a^5}{\kappa l} = 0.0495 \frac{\gamma r_a^5}{\kappa l}. \quad (24)$$

In Abb. 3 sind mittels der Höhenlagen  $\alpha$  des Membranwölbhügels wieder die Höhenlinien (23) des Geschwindigkeitsprofils (Isotachen) dargestellt, die für die — auch in den folgenden Beispielen gewählten — Größen  $\nu = 1$ ,  $\mu = 2$  berechnet worden sind (man vergleiche in I die Tabellen 2, S. 369, und 3, S. 370). Dasselbst sind auch die Meridianschnitte des Wölbhügels durch die  $\xi$ - und  $\eta$ -Achse angegeben. Man braucht wieder bloß die Größe  $\alpha$  durch  $\beta$  zu ersetzen, um sogleich die Abb. 3 als Geschwindigkeitsrelief auffassen zu dürfen<sup>4</sup>.

### C. Strömung durch ein Kreisringrohr mit beweglichem Innenmantel, der eine vorgegebene Geschwindigkeit $v_s$ besitzt

Auch hier gilt die Lösung (10a), sofern auch hier wieder zunächst das Membrangleichnis zugrunde gelegt wird. Der Geschwindigkeit  $v_s$  entspricht hier eine vorgegebene Auslenkung  $w_s'$  des Innenmantels. Die Grenzbedingungen lauten also hier:

$$w'(r = r_a) = 0; \quad w'(r = r_i) = w_s'. \quad (25)$$

Hiermit findet man für die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{\frac{\gamma h}{4S} (r_a^2 - r_i^2) - w_s'}{\ln \frac{r_a}{r_i}}; \quad C_2 = \frac{\gamma h}{4S} \cdot r_a^2 - \frac{\frac{\gamma h}{4S} (r_a^2 - r_i^2) - w_s'}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \ln r_a$$

und erhält schließlich aus (10a):

$$w' = \frac{\gamma h}{4S} (r_a^2 - r^2) - \left[ \frac{\gamma h}{4S} (r_a^2 - r_i^2) - w_s' \right] \frac{\ln \frac{r_a}{r}}{\ln \frac{r_a}{r_i}}. \quad (26)$$

$w''$  kann unmittelbar von Gl. (21b) übernommen werden. Benutzt man wieder die in (17) eingeführten dimensionslosen Größen, so erhält man bei Beachtung von (11), wenn man noch die zu  $\alpha$ ,  $\beta$  analogen dimensionslosen Größen

$$\frac{w_s' \cdot S}{\gamma r_a^3} = \frac{\alpha_s}{8}; \quad \frac{v_s \kappa l}{\gamma r_a^3} = \frac{\beta_s}{8} \quad (27a, b)$$

hinzunimmt:

$$\alpha = 2 \left[ \nu (1 - \varrho^2) + \left( 1 - \frac{1}{\mu^2} \right) \nu \cdot \frac{\ln \varrho}{\ln \mu} \right] - \alpha_s \frac{\ln \varrho}{\ln \mu} + \left[ -\varrho^3 + \left( 1 + \frac{1}{\mu^2} \right) \varrho - \frac{1}{\mu^2} \varrho \right] \cos \varphi. \quad (28)$$

Wählt man wieder  $\nu = 1$  und  $\mu = 2$ , so erhält man für die Ausdrücke in den eckigen Klammern von (28):

$$2(1 - \varrho^2) + \frac{3}{2 \ln 2} \ln \varrho = -Z(\varrho) \quad \text{bzw.} \quad -\varrho^3 + \frac{5}{4} \varrho - \frac{1}{4} \varrho = -N(\varrho)^6.$$

Mit diesen Abkürzungen ergibt nun die Auflösung von (28) nach  $\cos \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{\alpha + Z(\varrho) + \frac{\alpha_s}{\ln 2} \ln \varrho}{-N(\varrho)}. \quad (29)$$

Für  $\alpha_s$  wurde  $-0.3$  gewählt, also eine Auslenkung  $w_s'$  (bzw. Geschwindigkeit  $v_s$ ), die der durch den hydrostatischen Druck zu erwartenden Auslenkung (Geschwindigkeit) entgegengesetzt gerichtet ist. In der folgenden Tabelle 1 sind die beiden letzten

<sup>4</sup> Man vergleiche hierzu R. v. Mises: Elemente der technischen Hydromechanik, I. Teil, S. 45, Aufgabe 13, 1914. Lösung ebendort S. 208/09. Die Aufgabe wird dort allerdings nicht in voller Allgemeinheit durchgeführt, daher ist (21a) der vorliegenden Arbeit nicht angegeben.





Summanden des Zählers von (29) und ihre Summe sowie auch der Nenner —  $N(\varrho)$  für die in der ersten und letzten Spalte angegebenen Werte von  $\varrho$  berechnet worden, wobei die Funktionen  $Z(\varrho)$  und  $N(\varrho)$  der Arbeit I entnommen werden konnten<sup>5</sup>. Nach (29) wurden sodann für die oben angegebenen  $\alpha$ -Werte die Werte  $\cos \varphi$  berechnet, die in Abb. 4 der Konstruktion der Schichtenlinien dienten. In den letzten drei Spalten wurden sodann für  $\cos \varphi = \pm 1$  ( $\eta$ -Achse, Schnitt  $A-B$ ) und für

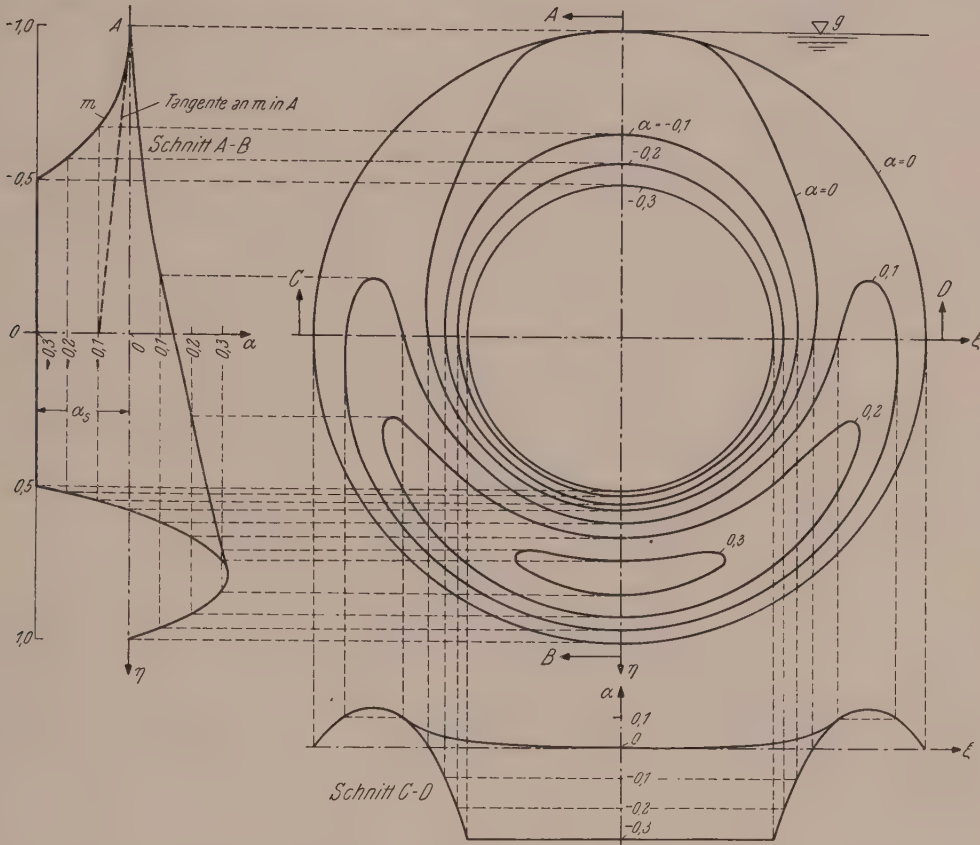


Abb. 4. Die Höhenlinien der Wölfläche der Kreisringmembran unter hydrostatischem Druck, deren Innenkreisplatte eine vorgegebene Auslenkung besitzt, für die durch die Werte  $\alpha$  gegebenen Höhenlagen der zur Basis der Wölfläche parallelen Schnittebenen

$\cos \varphi = 0$  ( $\xi$ -Achse, Schnitt  $C-D$ ) die zu den einzelnen Größen von  $\varrho$  gehörigen  $\alpha$ -Werte berechnet und so die Meridianschnitte durch die  $\xi$ - und  $\eta$ -Achse konstruiert, wobei zugleich die Schnittpunkte der Höhenlinien mit den Koordinatenachsen gewonnen wurden, so daß die Höhenlinien noch mehr Konstruktionspunkte erhielten.

Die Schichtenlinie  $\alpha = 0$  schneidet die negative  $\eta$ -Achse, für die  $\cos \varphi = -1$  gilt, nicht vor dem Punkte  $\eta = -1$ . Denn für  $\cos \varphi = -1$  folgt aus (29):

$$\alpha = N(\varrho) - Z(\varrho) - \frac{\alpha_s}{\ln 2} \ln \varrho = \varrho^3 - \frac{5}{4} \varrho + \frac{1}{4 \varrho} + 2(1 - \varrho^2) + \frac{1,8}{\ln 2} \ln \varrho^6.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d\alpha}{d\varrho} = 3\varrho^2 - \frac{5}{4} - \frac{1}{4\varrho^2} - 4\varrho + \frac{1,8}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\varrho},$$

somit

$$\left( \frac{d\alpha}{d\varrho} \right)_{\varrho=1} = +0,1,$$

<sup>5</sup> Man vergleiche I, Gl. (43a, b, c), S. 368, und ebendort Tab. 2, S. 369.

woraus wegen  $d\varrho < 0$  auch  $d\alpha < 0$  folgt, das heißt, die Tangente an den Meridianschnitt  $A-A$  im Punkte  $\varrho = 1$ ,  $\varphi = \pi$  ist schwach gegen die negativen  $\alpha$ -Werte zugeneigt<sup>6</sup>. Man vergleiche Schnitt  $A-B$  in Abb. 4.

Schließlich erhält man aus (7) mit (26):

$$V = \frac{\gamma h \pi}{8 S} (r_a^2 - r_i^2)^2 + \frac{2 \pi}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \left[ \frac{\gamma h}{4 S} (r_a^2 - r_i^2) - w_s' \right] \left( \frac{r_i^2}{2} \ln \frac{r_a}{r_i} - \frac{r_a^2 - r_i^2}{4} \right) + w_s' r_i^2 \pi. \quad (30)$$

Bei Einführung dimensionsloser Größen nach (17) und (27) erhält man:

$$V = \frac{\gamma r_a^5 \pi}{8 S} \left\{ \frac{\nu}{\mu^4} (\mu^2 - 1)^2 + \left[ \frac{\nu}{\mu^2} (\mu^2 - 1) - \frac{\alpha_s}{2} \right] \frac{2 \ln \mu - (\mu^2 - 1)}{\mu^2 \ln \mu} + \frac{\alpha_s}{\mu^2} \right\}. \quad (30a)$$

Setzt man zwecks Kontrolle in (30a)  $\alpha_s = 0$ , so liegen die Verhältnisse des Kreisquerschnittes mit festen Kreisrändern vor. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\gamma r_a^5 \pi}{8 S} \left\{ \frac{\nu}{\mu^4} (\mu^2 - 1)^2 + \frac{2 \nu}{\mu^4} (\mu^2 - 1) - \frac{\nu (\mu^2 - 1)^2}{\mu^4 \ln \mu} \right\} = \\ &= \frac{\gamma r_a^5 \pi}{8 S} \cdot \nu \frac{(\mu^4 - 1) \ln \mu - (\mu^2 - 1)^2}{\mu^4 \ln \mu}. \end{aligned}$$

Hiermit ist für  $\nu = 1$  der entsprechende Ausdruck in I, S. 370 oben, wiedergefunden. Setzt man in (30a)  $\nu = 1$ ,  $\mu = 2$ ,  $\alpha_s = -0.3$ , so erhält man

$$V = -0.01425 \frac{\gamma r_a^5}{S}, \quad \text{somit} \quad Q = -0.01425 \frac{\gamma r_a^5}{\pi l}.$$

Es überwiegt somit die Strömung gegen den hydrostatischen Druck.

D. Strömung durch ein Kreisringrohr mit beweglichem Innenmantel, der eine seiner Geschwindigkeit proportionale Bremsung erleidet

Diesem Strömungsfall entspricht eine Membran mit elastisch gelagerter Innenkreisplatte, die aber gegen Verdrehen gesichert ist ( $c_d = \infty$ ). Dieser Fall ist in I, 5, S. 375 bis 379, durchgerechnet, und es kann Gl. (69) daselbst mit  $c_d = \infty$  unmittelbar angewendet werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\gamma}{8 S} \left\{ (r_a^2 - r^2) \frac{2 h}{N} 2 \pi S + \left( -r^2 \ln \frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \ln \frac{r}{r_i} + r_i^2 \ln \frac{r_a}{r} \right) \frac{2 c_s h}{N} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ -r^3 + (r_a^2 + r_i^2) r - \frac{r_a^2 r_i^2}{r} \right] \cos \varphi \right\}; \quad N = 2 \pi S + c_s \ln \frac{r_a}{r_i}. \end{aligned} \quad (31)$$

$c_s$  ist hierbei die Federkonstante der elastischen Lagerung des Innenrohres gegen Verschieben. Führt man noch die weitere dimensionslose Größe

$$\sigma = \frac{c_s}{2 \pi S} \quad (32)$$

ein, so erhält man mit den Einführungen (17) aus (31):

$$\alpha = \frac{2 \nu (1 - \varrho^2) + 2 \sigma \nu \ln \mu \left[ 1 - \varrho^2 + \left( 1 - \frac{1}{\mu^2} \right) \frac{\ln \varrho}{\ln \mu} \right]}{1 + \sigma \ln \mu} + \left[ -\varrho^3 + \left( 1 + \frac{1}{\mu^2} \right) \varrho - \frac{1}{\mu^2 \varrho} \right] \cos \varphi. \quad (33)$$

Auch hier sollen wieder  $\nu = 1$ ,  $\mu = 2$ , ferner  $\sigma = 3$  gewählt werden. Dann erkennt man im ersten Bruch die Funktion  $\varphi_1(\varrho)$  in I (71a), S. 377, im Faktor von  $\cos \varphi$  aber die Funktion  $-N(\varrho)$ , die schon im vorhergehenden Beispiel verwendet und in

<sup>6</sup> Zum Beispiel ergibt sich für  $\varrho = 0.9$   $\alpha = -0.01185$ .



Tabelle 1 berechnet worden ist.  $\varphi_1(\varrho)$  und  $-N(\varrho)$  sind auch in den beiden ersten Spalten von Tabelle 2 für die in den Spalten ganz links und ganz rechts angegebenen Werte von  $\varrho$  berechnet worden. Hiermit berechnet sich  $\cos \varphi$  nach (33) zu:

$$\cos \varphi = \frac{\alpha - \varphi_1(\varrho)}{-N(\varrho)}. \quad (34)$$

Die Werte von  $\cos \varphi$  nach (34) für die oben angegebenen  $\alpha$ -Werte sind in den sieben weiteren Spalten angegeben.

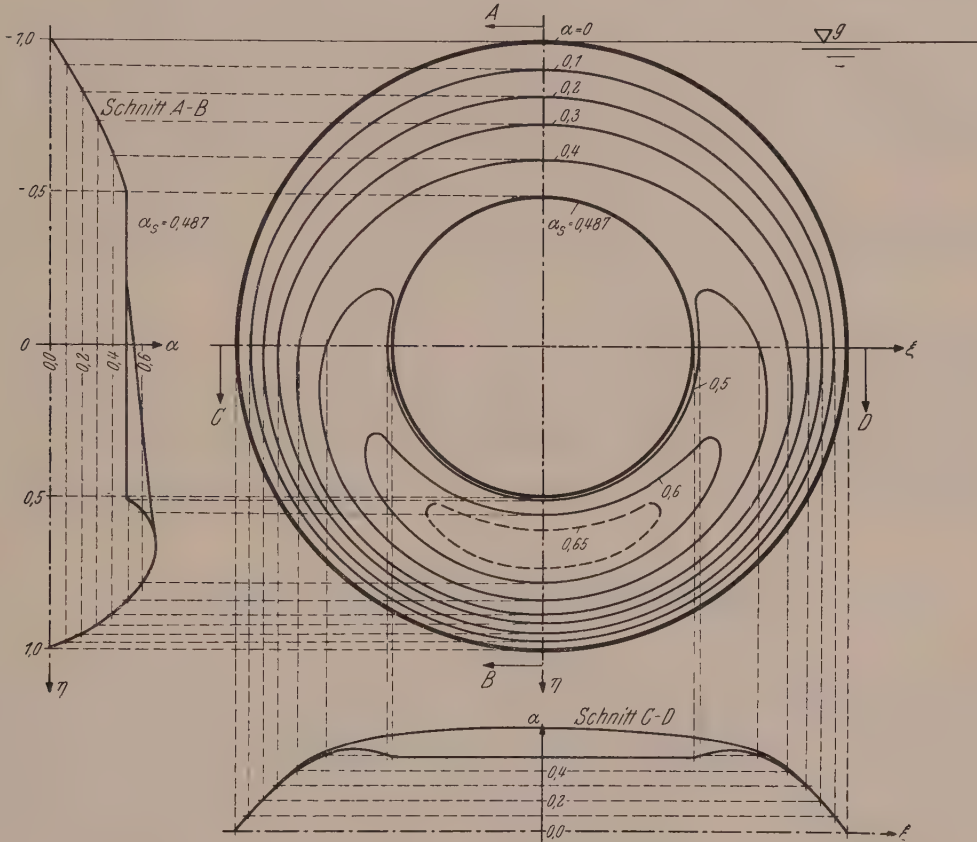


Abb. 5. Die Höhenlinien der Wölfläche der Kreisringmembran unter hydrostatischem Druck mit gegen Verschieben elastisch gelagerter Innenkreisplatte für die durch die Werte  $\alpha$  gegebenen Höhenlagen der zur Basis der Wölfläche parallelen Schnittebenen

Die letzten drei Spalten enthalten dann wieder die nach (34) berechneten Werte von  $\alpha$  für  $\cos \varphi = -1, 0, +1$ , die der Konstruktion der Meridianlinien in Abb. 5 dienten. Diese enthält auch wieder die Schichtenlinien des Membranwölhügels für die dort angegebenen Werte von  $\alpha$ ; sie vermitteln wieder ein plastisches Bild des Wölhügels oder, wenn man  $\alpha$  durch  $\beta$  ersetzt, des Geschwindigkeitsreliefs der zugeordneten Laminarströmung.

Mit  $v_1 = 1 + \sigma \ln \mu = 1 + 3 \ln 2 = 3,07945$  findet man die Verschiebung der das Innenrohr repräsentierenden Kreisplatte nach I (74a) zu:

$$w_s' = \frac{\gamma r_a^3}{4S} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 v_1} = 0,06085 \frac{\gamma r_a^3}{S}; \quad v_s = 0,06085 \frac{\gamma r_a^3}{\pi l}. \quad (35)$$

Den zugehörigen Wert  $\alpha_s$  erhält man nach (17e) zu:

$$\alpha_s = 8 \frac{w_s' S}{\gamma r_a^3} = 8 \cdot 0.06085 = 0.487 = \beta_s. \quad (35a)$$

Daher umschließen in Abb. 5 die Höhenlinien  $\alpha = 0.1$  bis  $0.4$  den Innenkreis  $r = r_i$ , während jene mit  $\alpha = 0.5, 0.6, 0.65$  in sich innerhalb der Membranringfläche zurückkehrende Kurven darstellen. Man entnimmt dem Meridianschnitt  $A-B$  in Abb. 5 ferner  $\alpha_{\max} = 0.68$ , somit ist  $v_{\max} = 0.68/8 \gamma r_a^3 / \kappa l = 0.085 \gamma r_a^3 / \kappa l$ .

Das Volumen des Wölbhügels  $V$  erhält man unmittelbar aus I (61):

$$V = \frac{\gamma h \pi}{8 S N} \left\{ (r_a^4 - r_i^4) 2 \pi S + \left[ (r_a^4 - r_i^4) \ln \frac{r_a}{r_i} - (r_a^2 - r_i^2)^2 \right] c_s \right\}, \quad (36)$$

$$N = 2 \pi S + c_s \ln \frac{r_a}{r_i}$$

oder mittels (17) und (32) in möglichst dimensionsloser Form aus:

$$V = \frac{\gamma r_a^5}{S} \frac{\nu \pi}{8 \mu^4 (1 + \sigma \ln \mu)} \{ \mu^4 - 1 + [(\mu^4 - 1) \ln \mu - (\mu^2 - 1)^2] \sigma \}. \quad (36a)$$

Mit  $\nu = 1$ ,  $\mu = 2$ ,  $\sigma = 3$  erhält man aus (36a)

$$V = 0.153 \frac{\gamma r_a^5}{S}, \quad \text{somit} \quad Q = 0.153 \frac{\gamma r_a^5}{\kappa l}$$

als sekundliche Durchflußmenge<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> Für elliptische und rechteckige Kanalquerschnitte wurden die Laminarströmungen unter statischer Druckverteilung vom Verf. analog untersucht. Im ersteren Falle ließen sich geschlossene Lösungen angeben, während die gut konvergenten Reihen des letzteren Falles eine rasche zahlenmäßige Auswertung zuließen.

(Eingegangen am 20. Dezember 1957)

## Über Körperfarben im Röntgengebiet

Von J. Braunbeck, Wien

**Zusammenfassung.** Aus der Monotonie der Wellenlängenabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten zwischen Paarbildungsabsorption und  $K$ -Absorptionskante wird eine notwendige Bedingung für das Vorkommen von Körperfarben hergeleitet. Die Existenz dieser Bedingung erklärt das Fehlen bestimmter Farben in Röntgen-Farbphotographien.

Bei der Betrachtung von Röntgen-Farbphotographien fällt häufig das Fehlen bestimmter Farben auf. Derartige Photographien werden in der Regel für Zwecke der Röntgendiagnostik mit durchfallender Strahlung angefertigt, deren Wellenlänge kleiner ist als die der  $K$ -Absorptionskante des schwersten in radiographisch wirksamer Konzentration im Aufnahmeobjekt enthaltenen Elementes. Im Spektralbereich zwischen Paarbildungsabsorption und  $K$ -Absorptionskante ist der Absorptionskoeffizient eine monoton wachsende Funktion der Wellenlänge. Nachstehend wird aus dieser Monotonie eine notwendige Bedingung für das Vorkommen einer Farbe abgeleitet.

Verallgemeinert man den Farbbegriff auf Wellenlängen außerhalb des sichtbaren Spektralbereiches, so kann man eine Anordnung von drei wellenlängenabhängigen Detektoren mit den Empfindlichkeiten  $E_i(\lambda)$ ;  $i = 1, 2, 3$  als farbempfindliches System bezeichnen. Das Zahlentripel  $[E_1(\lambda), E_2(\lambda), E_3(\lambda)]$  kann als Koordinatenangabe eines Vektors  $E_i$  betrachtet werden. Hält man den Anfangspunkt des Vektors  $E_i$  fest und variiert den Parameter  $\lambda$ , so erhält man einen Kegel, den sog. Spektralkegel, der die Schar aller reellen Farbvektoren einhüllt.

Einer auf das System auffallenden Strahlung mit der spektralen Intensitätsverteilung  $I(\lambda)$  wird durch die Beziehung

$$A_i = \int_0^{\infty} E_i(\lambda) \cdot I(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

ein Farbvektor  $A_i$  zugeordnet.

Bezogen auf ein bestimmtes farbempfindliches System wird eine Strahlung als weiß bezeichnet, wenn die Koordinaten des ihr zugeordneten Farbvektors untereinander gleich sind.

$$\int_0^{\infty} E_1(\lambda) \cdot I(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} E_2(\lambda) \cdot I(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} E_3(\lambda) \cdot I(\lambda) d\lambda. \quad (2)$$

Durchdringt die weiße Strahlung ein Objekt, so wird sie verfärbt. Bezeichnet man die Dicke des Objektes mit  $b$  und seinen Absorptionskoeffizienten mit  $\tau(\lambda)$ , so gilt für den der verfärbten Strahlung zugeordneten Farbvektor:

$$B_i = \int_0^{\infty} E_i(\lambda) \cdot I(\lambda) \cdot e^{-\tau(\lambda) \cdot b} d\lambda. \quad (3)$$

Nach den Regeln der Integralrechnung existieren drei ausgezeichnete Wellenlängen  $\bar{\lambda}_i$ , für die

$$B_i = e^{-\tau(\bar{\lambda}_i) \cdot b} \int_0^{\infty} E_i(\lambda) \cdot I(\lambda) d\lambda \quad (4)$$

gilt.

Wegen (2) können die Integrale in (4) durch einen Faktor  $C$  ersetzt werden.

$$B_i = C \cdot e^{-\tau(\bar{\lambda}_i) \cdot b}. \quad (5)$$

Nun treffe man die Zuordnung der  $E_i(\lambda)$  und damit der  $\bar{\lambda}_i$  zu den Indizes so, daß die Ungleichung

$$\bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 \leq \bar{\lambda}_3 \quad (6)$$

erfüllt ist. Wegen der Monotonie der Funktion  $\tau(\lambda)$  folgt daraus

$$B_1 \geq B_2 \geq B_3 \quad (7)$$

als einschränkende Ungleichung für die Koordinaten des Farbvektors. Das farbenempfindliche System wird also nur Farben aufzeichnen, deren Farbvektoren im Schnittvolumen des Spektralkegels mit der aus den Ebenen  $z = 0$ ,  $x = y$  und  $y = z$  gebildeten Pyramide liegen.

Mitunter verwendet man farbempfindliche Systeme, die nur zwei wellenlängenabhängige Detektoren enthalten. Das Zahlenpaar  $E_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$ , ist dann als Koordinatenangabe eines Vektors in der Ebene deutbar. Bei Variation von  $\lambda$  bestreicht der Vektor  $E_i$ , dessen Anfangspunkt wieder festgehalten wird, einen Ebenensektor, der alle im betreffenden farbempfindlichen System möglichen Farbvektoren enthält.

Die Gl. (1) gilt unverändert, während die Definition der weißen Strahlung nunmehr

$$\int_0^{\infty} E_1(\lambda) \cdot I(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} E_2(\lambda) \cdot I(\lambda) d\lambda \quad (8)$$

lautet. Durch einen Absorber verfärbter Strahlung wird auch hier durch die Gl. (3) ein Farbvektor  $B_i$  zugeordnet. Aus der Monotonie der Funktion  $\tau(\lambda)$  folgt sodann

$$B_1 \geq B_2. \quad (9)$$

Die vorkommenden Farbvektoren liegen also in der Überlappung des Spektralsektors mit dem durch die Geraden  $y = 0$  und  $x = y$  begrenzten Ebenensektor.

Technischer Vorteile wegen verwendet man in der Röntgen-Farbphotographie oft einen Detektor mit der spektralen Empfindlichkeitsverteilung  $E(\lambda)$ , der nach-



einander drei verschiedenen Strahlungen mit den spektralen Intensitätsverteilungen  $I_i(\lambda)$  ausgesetzt wird. Bei der Variation von  $\lambda$  beschreibt nun der Vektor  $I_i$  den Spektralkegel, auf dem die Körperfarben der Monochromatoren liegen. Die drei Strahlungen und der Detektor haben die Weißbedingung

$$\int_0^{\infty} E(\lambda) \cdot I_1(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} E(\lambda) \cdot I_2(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} E(\lambda) \cdot I_3(\lambda) d\lambda \quad (10)$$

zu erfüllen.

Einem Absorber von der Dicke  $b$  mit dem Absorptionskoeffizienten  $\tau(\lambda)$  wird durch

$$B_i = \int_0^{\infty} E(\lambda) \cdot I_i(\lambda) e^{-\tau(\lambda) \cdot b} d\lambda \quad (11)$$

ein Farbvektor  $B_i$  zugeordnet. Analog zu (4) existieren drei ausgezeichnete Wellenlängen  $\bar{\lambda}_i$ , welche die Bedingung

$$B_i = e^{-\tau(\bar{\lambda}_i) \cdot b} \cdot \int_0^{\infty} E(\lambda) \cdot I_i(\lambda) d\lambda \quad (12)$$

erfüllen. Aus (12) folgt wegen der Monotonie des Absorptionskoeffizienten wieder (7). Für den Fall eines Detektors, der von zwei Strahlungen verschiedener spektraler Energieverteilung getroffen wird, erhält man in analoger Weise die Gl. (9).

#### Literatur

- Bouma, P. J.: Farbe und Farbwahrnehmung. Eindhoven: Philips. 1951.  
 Lachner, F.: Über die richtige Farbwiedergabe. Österr. Ingenieur-Arch. 11, H. 2 (1957).  
 Richter, M.: Grundriß der Farbenlehre der Gegenwart. Dresden: Steinkopf. 1940.  
 Ziffer-Teschenbruck, M. E.: Verfahren zur Herstellung von farbenphotographischen Röntgenbildern. Ö. P. Nr. 174995.

(Eingegangen am 31. Dezember 1957)

## Zur Theorie der Gleichrichtung

Von K. Prachar, Math. Inst. d. Univ. Wien

Mit 4 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Es wird die Differentialgleichung eines Gleichrichterkreises mit Widerstand und Kondensator aufgestellt und die Gestalt der zugehörigen Lösungen untersucht.

### I

Ein Gleichrichter bestehe aus einer Diode (s. Abb. 1) zusammen mit einem Kondensator  $C$  und dem Verbrauchswiderstand  $R$ , den wir als Ohmschen Widerstand annehmen wollen (in Abb. 1 ist die Heizung der Diode weggelassen). Die Kennlinie einer „idealen Diode“ zeigt Abb. 2. Diese Kennlinie gibt an, welcher Strom  $i$  durch die Diode fließt, wenn eine gewisse Spannung  $e$  an die Diode gelegt wird (wobei  $e$  positiv gerechnet wird, wenn die Anode höheres Potential hat als die Kathode). Wir können diese Kennlinie in der Form schreiben:

$$i = f(e), \quad \text{wobei} \quad f(e) = \begin{cases} 0 & \text{für } e \leq 0, \\ \lambda e & \text{für } e > 0 \end{cases} \quad (1)$$

und  $1/\operatorname{tg} \varphi = \lambda$  gesetzt wurde ( $\lambda > 0$ ).

Wenn auch diese Kennlinie keineswegs genau den tatsächlichen Verhältnissen entspricht — der Knick bei  $e = 0$  ist nicht so ganz „abrupt“ und die Kurve verläuft für genügend große Werte von  $e$  infolge der beschränkten Elektronenemission fast parallel zur Abszissenachse (etwa so, wie die strichlierte Kurve aus Abb. 2) —,

so wird doch für die Rechnung oft die obige idealisierte Form der Kurve zugrunde gelegt.

Legt man nun an die beiden Eingangsklemmen eine Wechselspannung  $U_0 \sin \omega t$ ,  $U_0 > 0$ , so fließt durch den Widerstand  $R$  der gleichgerichtete Strom  $I$ . Zur Berechnung von  $I$  wird in den Lehrbüchern meist angenommen, daß die Spannung  $u$  am Widerstand konstant ist, das heißt, daß die Kapazität  $C$  so groß ist, daß die

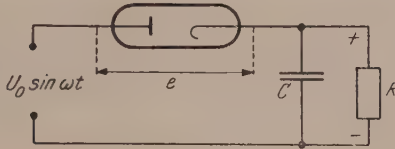


Abb. 1

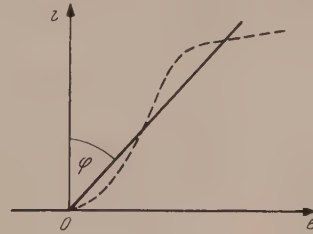


Abb. 2

Wechselspannungen aller auftretenden Frequenzen kurzgeschlossen werden. Sei  $\bar{u}$  diese — vorläufig unbekannte — konstante Spannung. Dann wird  $e = U_0 \sin \omega t - \bar{u}$  und wenn man  $i = f(e)$  als Funktion von  $\omega t$  betrachtet, ergibt sich das Bild aus Abb. 3, in der zum Vergleich die Kurve  $i = \lambda U_0 \sin \omega t$  strichliert eingezeichnet ist. Es gilt ja

$$i = \begin{cases} \lambda (U_0 \sin \omega t - \bar{u}) & \text{für } U_0 \sin \omega t > \bar{u}, \\ 0 & \text{für } U_0 \sin \omega t \leq \bar{u}. \end{cases} \quad (2)$$

Hieraus wird der Gleichstromanteil durch Mittelwertbildung ermittelt:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i \, d\omega t = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2} - \vartheta}^{\frac{\pi}{2} + \vartheta} \lambda (U_0 \sin \omega t - \bar{u}) \, d\omega t = \\ &= \frac{\lambda}{\pi} (U_0 \sin \vartheta - \bar{u} \vartheta) = \frac{\lambda U_0}{\pi} (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta), \end{aligned} \quad (3)$$

wobei  $\vartheta$  durch  $U_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \vartheta\right) = \bar{u}$  definiert ist, das heißt,  $U_0 \cos \vartheta = \bar{u}$ .

Indem man annimmt, daß durch den Widerstand nur der Gleichstromanteil fließt, kann man  $\vartheta$  aus der Gleichung  $\bar{u} = I \cdot R$ , das heißt,

$$U_0 \cos \vartheta = \frac{\lambda}{\pi} U_0 R (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta) \quad (4)$$

berechnen:  $\operatorname{tg} \vartheta - \vartheta = \pi/\lambda R$ ,  $0 < \vartheta < \frac{1}{2}\pi$ . Weiter ergibt sich damit

$$I = \pi^{-1} \lambda U_0 (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta)$$

und  $\bar{u} = U_0 \cos \vartheta$ .

Der durch den Kondensator fließende Strom ist gleich

$$I_C = i - I. \quad (5)$$

Durch Fourier-Entwicklung nach Vielfachen von  $\omega t$  erhält man schließlich noch die Amplitude, mit der ein bestimmtes Vielfaches der Grundfrequenz  $\omega$  in  $I_C$  auftritt.

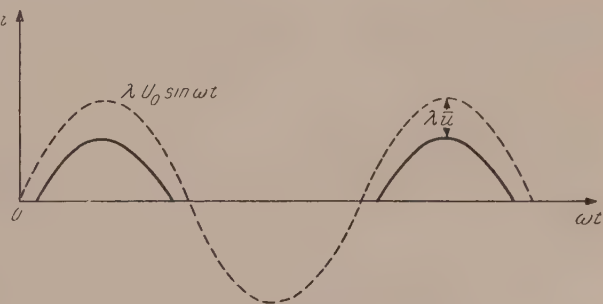


Abb. 3

Wenn auch die obige Art der Berechnung praktisch vollkommen ausreicht und auch theoretisch den Kern der Sache trifft, so ist sie doch prinzipiell insofern ungenau, als die Annahme einer konstanten Spannung  $u = \bar{u}$  am Widerstand nicht zulässig ist (es könnte ja durch den Kondensator dann überhaupt kein Strom fließen und im ganzen Kreis daher nur Gleichstrom fließen). Im folgenden soll die exakte Form der Lösung der zugehörigen (nichtlinearen) Differentialgleichung untersucht werden (natürlich wird durch die Annahme einer idealisierten Kennlinie ohnehin eine gewisse Ungenauigkeit begangen).

## II

Mit den Bezeichnungen aus I hat man einerseits  $i = f(e)$  und andererseits  $i = (u/R) + C \dot{u}$ . Wegen  $e = U_0 \sin \omega t - u$  ergibt sich für  $u$  die Differentialgleichung

$$C \dot{u} + \frac{u}{R} = f(U_0 \sin \omega t - u).$$

Nach (1) ergibt sich

$$\dot{u} = -\frac{u}{RC} + \frac{\lambda}{C} (U_0 \sin \omega t - u) \quad \text{für } u \leq U_0 \sin \omega t, \quad (6)$$

$$\dot{u} = -\frac{u}{RC} \quad \text{für } u > U_0 \sin \omega t. \quad (7)$$

(Für  $C \rightarrow \infty$  geht diese Gleichung in  $\dot{u} = 0$  über.) Setzen wir noch

$$\alpha = \frac{1}{\omega RC}, \quad \delta = \frac{\lambda}{\omega C} \quad (8)$$

und führen statt  $\omega t$  eine neue Veränderliche ein, die wir wieder mit  $t$  bezeichnen wollen, so schreiben sich die obigen Gleichungen in der Form

$$\dot{u} = -(\alpha + \delta)u + \delta U_0 \sin t \quad \text{für } u \leq U_0 \sin t, \quad (9)$$

$$\dot{u} = -\alpha u \quad \text{für } u > U_0 \sin t. \quad (10)$$

( $\alpha > 0$ ,  $\delta > 0$ .) Die allgemeine Lösung von (9) bzw. (10) lautet:

$$u = \frac{\delta U_0}{1 + (\alpha + \delta)^2} \{(\alpha + \delta) \sin t - \cos t\} + K e^{-(\alpha + \delta)t} \quad (11)$$

bzw.

$$u = \bar{K} e^{-\alpha t} \quad (12)$$

mit beliebigen Konstanten  $K, \bar{K}$ . Wir wollen nun beweisen, daß die Gln. (9), (10) eine periodische Lösung besitzen und daß jede andere Lösung gegen diese konvergiert.

Zunächst beweisen wir den

**Hilfssatz:** Sei  $t_1 < t_2$  und seien  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  zwei Lösungen von (9), (10) mit  $u_1(t_1) < u_2(t_1)$ . Dann gilt

$$u_1(t) < u_2(t) \quad \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \quad (13)$$

und

$$u_2(t_2) - u_1(t_2) < u_2(t_1) - u_1(t_1). \quad (14)$$

**Beweis:** Nach bekannten Sätzen über die Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen geht durch jeden Punkt der  $t, u$ -Ebene genau eine Lösung von (9), (10). Da sich die Integralkurven  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  nicht schneiden können, folgt (13).

Weiter hat man

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_2(t) dt < \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_1(t) dt,$$

denn bei festem  $t$  ist  $\dot{u}$  eine monoton abnehmende Funktion von  $u$ , und zwar sowohl für  $u \leq U_0 \sin t$  als auch für  $u > U_0 \sin t$ . Daraus ergibt sich (14).



Wir betrachten nun die Lösungen  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  von (9), (10), welche der folgenden Anfangsbedingung genügen:  $u_1(0) = -A$ ,  $u_2(0) = A$ ; dabei soll  $A$  eine so große positive Konstante sein, daß die Kurve  $u(t) = A e^{-\alpha t}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , ganz in  $u > U_0 \sin t$  verläuft. In  $0 \leq t \leq 2\pi$  ist dann  $u_2(t)$  mit dieser Kurve identisch und es gilt also  $u_2(2\pi) < A$ . Die Lösung (11) von (9), welche  $u(0) = -A$  erfüllt, lautet:

$$u = \frac{\delta U_0}{1 + (\alpha + \delta)^2} \{(\alpha + \delta) \sin t - \cos t\} + \left(-A + \frac{\delta U_0}{1 + (\alpha + \delta)^2}\right) e^{-(\alpha + \delta)t}. \quad (15)$$

Indem man  $A$  eventuell noch vergrößert, kann man erreichen, daß diese Kurve für  $0 \leq t \leq 2\pi$  ganz in  $u \leq U_0 \sin t$  verläuft und überdies, daß

$$\begin{aligned} u(2\pi) &= \frac{\delta U_0}{1 + (\alpha + \delta)^2} (-1 + e^{-(\alpha + \delta)2\pi}) - A e^{-(\alpha + \delta)2\pi} = \\ &= -A + \left(A - \frac{\delta U_0}{1 + (\alpha + \delta)^2}\right) (1 - e^{-(\alpha + \delta)2\pi}) \end{aligned}$$

größer als  $-A = u(0)$  wird. Diese Kurve ist dann für  $0 \leq t \leq 2\pi$  mit  $u_1(t)$  identisch und es gilt

$$\begin{aligned} u_1(0) &= -A, & u_1(2\pi) &> -A, \\ u_2(0) &= A, & u_2(2\pi) &< A. \end{aligned}$$

Da  $u_1(0) < u_2(0)$ , so folgt nach (13)  $u_1(2\pi) < u_2(2\pi)$ . Es muß also einen Wert  $a$  geben,  $-A < a < A$ , so daß für die Lösung  $u_0(t)$  von (9), (10), welche der Bedingung  $u_0(0) = a$  genügt, gilt:

$$u_0(2\pi) = u_0(0) = a.$$

Damit ist die Existenz einer periodischen Lösung bewiesen.

Es kann nur eine solche Lösung geben. Wäre nämlich  $u_0^*(t)$  eine zweite, hievon verschiedene, so müßte

$$u_0^*(0) - u_0(0) = u_0^*(2\pi) - u_0(2\pi)$$

gelten, was einen Widerspruch zu (14) ergäbe.

### III

Wir beweisen nun, daß jede Lösung von (9), (10) in gewissem Sinn gegen diese periodische Lösung konvergiert.

Sei  $u(t)$  irgendeine Lösung von (9), (10) und etwa  $u(0) < a = u_0(0)$ . Nach dem Hilfssatz ist dann

$$u_0(0) - u(0) > u_0(2\pi) - u(2\pi),$$

das heißt,  $u(2\pi) > u(0)$ ; ebenso ergibt sich  $u(4\pi) > u(2\pi)$  usw. Bilden wir nun die Funktionen  $f_n(t) = u_0(t + 2n\pi) - u(t + 2n\pi) = u_0(t) - u(t + 2n\pi)$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$ , so ist jede dieser Funktionen in  $0 \leq t \leq 2\pi$  monoton abnehmend und positiv. Ferner hat man  $f_n(2\pi) = f_{n+1}(0)$  und  $f_{n+1}(t) < f_n(t)$  für  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Daher existieren die Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(2\pi)$  und haben denselben Wert  $c$ ,  $c \geq 0$ . Ferner existiert für jedes  $t$  aus  $0 \leq t \leq 2\pi$  der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  und ist wegen  $f_n(0) \geq f_n(t) \geq f_n(2\pi)$  ebenfalls gleich  $c$ . Es existiert also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_0(t) - u(t + 2n\pi)\}$  und ist gleich  $c$ . Wir beweisen nun, daß  $c = 0$  sein muß.

Wegen der eben genannten Monotonieeigenschaften ist die Konvergenz der Folge  $f_n(t)$  gleichmäßig in  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Es gilt ja

$$0 < f_n(t) - f_{n+m}(t) \leq f_n(0) - f_{n+m}(0) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

$u(t + 2n\pi)$  konvergiert also für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen  $u_0(t) - c$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ). Da  $u(t)$  den Gl. (9), (10) genügt, folgt

$$\begin{aligned}\dot{u}(t + 2n\pi) &= -(\alpha + \delta)u(t + 2n\pi) + \delta U_0 \sin t & (u \leq U_0 \sin t) \\ \dot{u}(t + 2n\pi) &= -\alpha u(t + 2n\pi) & (u > U_0 \sin t).\end{aligned}$$

Daher konvergiert  $\dot{u}(t + 2n\pi)$  für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen

$$\begin{aligned}- (\alpha + \delta) [u_0(t) - c] + \delta U_0 \sin t & \quad [u_0(t) - c \leq U_0 \sin t] \\ - (\alpha + \delta) [u_0(t) - c] & \quad [u_0(t) - c > U_0 \sin t].\end{aligned}$$

Da die abgeleitete Folge der Folge  $u(t + 2n\pi)$  gleichmäßig konvergent ist, dürfen Differentiation und Grenzübergang vertauscht werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{u}(t + 2n\pi) = \frac{d}{dt} \lim_{n \rightarrow \infty} u(t + 2n\pi) = \frac{d}{dt} [u_0(t) - c].$$

Es ergibt sich also, daß  $u_0(t) - c$  ebenfalls den Differentialgleichungen (9), (10) genügt. Da  $u_0(t) - c$  eine periodische Funktion ist und nach dem oben Bewiesenen  $u_0(t)$  die einzige periodische Lösung von (9), (10) ist, so folgt  $c = 0$ .

#### IV

Die periodische Lösung, deren Existenz in II bewiesen wurde, verläuft — wie jetzt gezeigt werden soll — ganz in  $u > 0$ . Dazu genügt es zu beweisen, daß aus  $u(0) = 0$  folgt:  $u(t) > 0$  für  $0 \leq t \leq 2\pi$ ; denn nach dem oben Bewiesenen gilt für die periodische Lösung  $u_0(t)$  dann sicherlich  $u_0(t) > u(t)$ , da sich für  $u_0(t) < u(t)$  sofort  $u_0(0) < u(0) = 0$  und  $u(2\pi) - u_0(2\pi) > u(0) - u_0(0)$  ergäbe [im Widerspruch zu (14)].

Von  $u(0) = 0$  an ist die Lösungskurve  $u(t)$  der Gl. (9), (10) solange mit der entsprechenden Lösungskurve (11) von (9) identisch, als diese im Bereich  $u \leq U_0 \sin t$  verläuft. Die Gleichung der letzteren lautet nach (15) ( $A = 0$ )

$$\bar{u}(t) = \frac{\delta U_0}{1 + (\alpha + \delta)^2} \{(\alpha + \delta) \sin t - \cos t + e^{-(\alpha + \delta)t}\}.$$

Es gilt  $\bar{u}'(0) = 0$ ,  $\bar{u}''(0) = \delta U_0$ ; für genügend kleine  $t$  ist  $\bar{u}(t)$  monoton wachsend und  $\leq U_0 \sin t$ . Daher verläuft die Lösungskurve  $u(t)$ , für die  $u(0) = 0$  ist, zunächst im Inneren des Bereiches  $0 \leq t \leq \pi$ ,  $0 \leq u \leq U_0 \sin t$ . Der Punkt, in dem die Lösungskurve diesen Bereich zum erstenmal verläßt, möge dem Parameterwert  $t = t^*$  entsprechen. Es kann dann nicht  $u(t^*) = 0$  sein, denn die Lösungen von (9), (10), die für irgendein  $t^*$  mit  $0 < t^* \leq \pi$  verschwinden, verlaufen für genügend nahe an  $t^*$  gelegene Werte von  $t$ ,  $t < t^*$ , außerhalb dieses Bereiches. Es kann aber auch nicht  $u(t^*) = U_0 \sin t^*$ ,  $t^* < \arctan(-1/\alpha)$  sein, denn dort wäre  $u'(t^*) = -\alpha u(t^*) = -\alpha U_0 \sin t^* < U_0 \cos t^*$ , so daß wieder für genügend nahe an  $t^*$  gelegenes  $t < t^*$  sicherlich  $[t, u(t)]$  nicht im Bereich  $0 \leq t \leq \pi$ ,  $0 \leq u \leq U_0 \sin t$  liegen würde. Es ergibt sich also  $\arctan(-1/\alpha) \leq t^* < \pi$ ,  $u(t^*) = U_0 \sin t^*$ . Für  $t^* < t \leq 2\pi$  ist  $u(t)$  durch die Gleichung

$$u(t) = u(t^*) e^{-\alpha(t-t^*)} \quad (t^* < t \leq 2\pi)$$

gegeben; denn  $u(t)$  genügt dann (10) und es ist  $u(t) > U_0 \sin t$  für  $t^* < t \leq 2\pi$ , da die Steigung von  $U_0 \sin t$  für  $t^* < t < \pi$  abnimmt, während die Steigung von  $u(t)$  zunimmt. Daher folgt schließlich — wie behauptet —  $u(t) > 0$  für  $0 < t \leq 2\pi$ . Daraus ergibt sich  $u_0(t) > 0$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) und außerdem

$$\int_0^{2\pi} u_0(t) dt > 0.$$

## V

## Zur tatsächlichen Berechnung des Gleichstromanteils

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_0(t)}{R} dt$$

bemerken wir, daß die Kurve  $u_0(t)$ , wenn  $t$  von 0 bis  $2\pi$  wächst, zunächst im Bereich  $u > U_0 \sin t$  verläuft, sodann, etwa für  $t = t_1$ , in den Bereich  $u \leq U_0 \sin t$  eintritt, diesen etwa bei  $t = t_2$ ,  $\frac{1}{2}\pi < t_2 < \pi$ , wieder verläßt und für  $t_2 < t \leq 2\pi$  wieder in  $u > U_0 \sin t$  liegt. Abb. 4 zeigt eine Skizze des Verlaufes von  $u_0(t)$  und von zwei anderen Integralkurven.

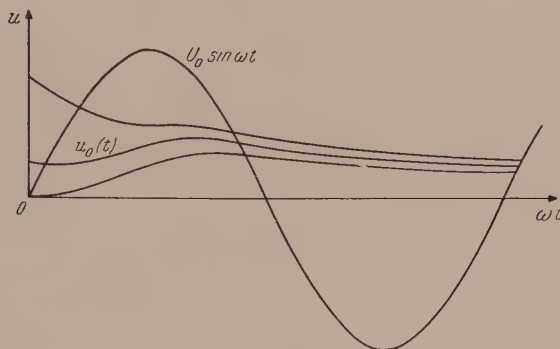


Abb. 4

Unter Benützung von (12) erhält man als Bedingung für die Stellen  $t_1$  und  $t_2$

$$U_0 e^{-\alpha(t-t_2)} \sin t_2 \Big|_{t=2\pi+t_1} = U_0 \sin t_1; \quad (16)$$

aus (11) ergibt sich

$$\frac{\delta U_0}{1 + (\alpha + \delta)^2} \{(\alpha + \delta) \sin t_1 - \cos t_1\} + K e^{-(\alpha + \delta)t_1} = U_0 \sin t_1 \quad (17)$$

und dieselbe Gleichung für  $t_2$  an Stelle von  $t_1$ . Eliminiert man  $K$  aus beiden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} e^{(\alpha + \delta)t_1} \{ (1 + \alpha \delta + \alpha^2) \sin t_1 + \delta \cos t_1 \} = \\ = e^{(\alpha + \delta)t_2} \{ (1 + \alpha \delta + \alpha^2) \sin t_2 + \delta \cos t_2 \}. \end{aligned} \quad (18)$$

Aus diesen beiden (transzendenten) Gleichungen können  $t_1$  und  $t_2$  bestimmt werden. Das Integral über  $u_0(t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) setzt sich dann aus den beiden folgenden Bestandteilen zusammen:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\delta U_0}{1 + (\alpha + \delta)^2} \{(\alpha + \delta) \sin t - \cos t\} + K e^{-(\alpha + \delta)t} \right) dt = \\ & = \frac{\delta U_0}{1 + (\alpha + \delta)^2} \{(\alpha + \delta) (\cos t_1 - \cos t_2) + \sin t_1 - \sin t_2\} + \frac{K}{\alpha + \delta} (e^{-(\alpha + \delta)t_1} - e^{-(\alpha + \delta)t_2}) = \\ & = \frac{U_0}{\alpha + \delta} \{(\sin t_1 - \sin t_2) + \delta (\cos t_1 - \cos t_2)\} \end{aligned}$$

[unter Benützung von (17) und der analogen Gleichung für  $t_2$ ];

$$\int_{t_2}^{2\pi+t_1} U_0 e^{-\alpha(t-t_2)} \sin t_2 dt = -\frac{U_0}{\alpha} \sin t_2 \cdot e^{\alpha t_2} (e^{-\alpha(2\pi+t_1)} - e^{-\alpha t_2}) = \frac{U_0}{\alpha} (\sin t_2 - \sin t_1)$$



[unter Benützung von (16)]. Schließlich wird

$$I = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} u_0(t) dt = \frac{\delta U_0}{2\pi \alpha (\alpha + \delta) R} \{(\sin t_2 - \sin t_1) + \alpha (\cos t_1 - \cos t_2)\}.$$

Zusatz bei der Korrektur: Ein ausreichend genaues Näherungsverfahren zur Bestimmung der periodischen Lösung von (9), (10) wurde von J. Kammerloher (Hochfrequenztechnik III, Leipzig 1942, S. 189 f.) angegeben. Ersetzen wir zum Vergleich mit den dort erhaltenen Formeln in unserem Resultat  $U_0 \sin t$  durch  $U_0 \cos \omega t$  (d. h.  $t$  durch  $\omega t + \frac{\pi}{2}$ )! Mit  $\frac{1}{2} \omega (t_2 - t_1) = \vartheta$  und  $\frac{1}{2} \omega (t_2 + t_1) = -\psi$  ergibt sich aus (16)

$$\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \psi = \Im \frac{\pi - \vartheta}{\omega R C}. \quad (*)$$

Statt dieser Formel ergibt sich loc. cit. S. 192 [Formel (292 b)] näherungsweise  $\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \psi = (\pi - \vartheta)/\omega R C$ . Drückt man mittels (\*)  $\psi$  durch  $\vartheta$  aus und setzt dies in (18) ein, erhält man eine etwas komplizierte Gleichung zur Berechnung von  $\vartheta$ , welche loc. cit. S. 191 [Formel (291 a)] durch  $\operatorname{tg} \vartheta - \vartheta = \pi/\lambda R$  [vgl. oben (4)] ersetzt wird. Wenn man  $J$  durch  $\vartheta$  und  $\psi$  ausdrückt, findet man:

$$J = \pi^{-1} \lambda U_0 \cos \psi (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta).$$

(Eingegangen am 31. Dezember 1957)

Zum Aufsatz:

## Über eine Verallgemeinerung des Potentials auf Strömungen mit Drehung

Von Klaus Oswatitsch, Stockholm

(Österr. Ing.-Arch. 10, H. 2/3, 1956, S. 239—241)

Herr W. D. Hayes machte mich in liebenswürdiger Weise darauf aufmerksam, daß ich im ersten Satz meines Aufsatzes die voreilige Behauptung aufstellte, in jedem Strömungsfeld existiere eine zur Geschwindigkeitsrichtung orthogonale Flächenschar.

Wie aus Gl. (2) meines Aufsatzes hervorgeht, folgt aus dem Ansatz (1), daß der Geschwindigkeitsvektor auf dem Wirbelvektor senkrecht stehen muß:

$$\mathbf{w} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} = 0. \quad (2a)$$

Es wird in der Differentialgeometrie gezeigt, daß Gl. (2a) nicht nur die notwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung für die Existenz einer orthogonalen Flächenschar auf dem Vektorfeld  $\mathbf{w}$  darstellt.

Meine Ausführungen beziehen sich also nur auf Strömungen, welche Gl. (2a) genügen. Sie werden auch als komplexlamellar<sup>1</sup> bezeichnet. Wie groß die Klasse dieser Strömungen ist, erscheint noch unsicher. Sicher gehören ihr die ebene und die achsensymmetrische Strömung an. C. Truesdell<sup>2</sup> nimmt an, daß es eine Reihe weiterer solcher Strömungen gibt und leitet für diese Wirbelsätze ab.

<sup>1</sup> C. Truesdell: The kinematics of vorticity. Indiana Univ. Publ. Science Ser. No. 19, 94 (1954).

<sup>2</sup> C. Truesdell: Verallgemeinerung und Vereinheitlichung der Wirbelsätze ebener und rotationssymmetrischer Flüssigkeitsbewegung. Z. angew. Math. Mech. 31/3, 65—71.

## Franz Jung †

Am 3. Dezember 1957 verschied der emeritierte ordentliche Professor der Allgemeinen und Analytischen Mechanik an der Technischen Hochschule in Wien Dr. phil. Dr. techn. h. c. Franz Jung unerwartet an den Folgen einer überstandenen Grippe. Am 14. Mai 1872 als Sohn eines Richters zu Hohenelbe in Böhmen geboren, studierte Jung nach Gymnasialjahren in Wien, Mies und Prag an der Deutschen Universität in Prag, legte 1896 die Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik ab und wurde 1899 zum Doktor der Philosophie promoviert. Der Titel seiner dem Gebiete der mathematischen Physik angehörenden Dissertation lautete: „Über das Problem der Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln“. Von 1898 an wirkte Jung unter Professor Franz Stark als Assistent für Mechanik an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag und war gleichzeitig als Supplent am Deutschen Gymnasium in der Prager Vorstadt Smichow tätig. Als Jung 1899 eine Stelle als provisorischer Lehrer am Gymnasium in Brüx antreten sollte, verzichtete er auf die Fortsetzung der sicheren Mittelschullaufbahn, um an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag bleiben zu können, an der er sich 1904 für Mechanik habilitierte. Schon im folgenden Jahre wurde seine Lehrbefugnis an die Technische Hochschule in Wien übertragen, wo er die Assistentenstelle für Reine Mechanik unter Josef Finger übernahm und gleich mit Abhaltung von Parallelvorlesungen und Vorlesungen über Hydromechanik betraut wurde. 1911 erfolgte unter Bestellung zum Vorstände des neugeschaffenen Zweiten Institutes für Allgemeine Mechanik seine Ernennung zum außerordentlichen, 1919 die zum ordentlichen Professor. Aufgabe seines Institutes war die Einführung der Studierenden des Maschinenwesens und der Elektrotechnik in die Mechanik, wozu sich bald auch jene der technischen Physiker gesellte. Die Entpflichtung, die 1941 auf Grund deutschen Gesetzes erfolgte, unterbrach nur für kurze Zeit seine Lehrtätigkeit, da sich Jung unter den schwierigen Verhältnissen, denen die Technische Hochschule 1945 gegenüberstand, ihr sofort zur Verfügung stellte, als Honorarprofessor sein Institut wieder übernahm und bis 1947 in vollster Tätigkeit blieb.

Jungs wissenschaftliche Bedeutung erscheint dadurch gekennzeichnet, daß er von Anbeginn seines Wirkens die Stellung der zu Anfang dieses Jahrhunderts praktisch noch wenig verwendeten Vektorrechnung in der theoretischen und technischen Mechanik erkannt und selbst durch mehrere Veröffentlichungen gefördert hat, von denen hier „Ableitung im räumlichen Größenfelde“ (Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 567) und „Die Polarableitung in rechtwinklig krummlinigen Koordinaten“ (Akad., Wien, 1908) hervorgehoben sein mögen. Auch zur Tensorrechnung, der Weiterbildung der Vektorrechnung, hat Jung durch Veröffentlichungen in den Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung und in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften beigetragen. In der Literatur wurde vielfach die räumliche Ableitung als „Jungsche Ableitung“ und der allgemeine unsymmetrische Tensor nach Jung als „Affinor“, die Tensorrechnung selbst als „Affinorrechnung“ bezeichnet. Andere Arbeiten Jungs betrafen Dynamik des Kurbeltriebes, Massenausgleich, Hydrodynamik, die elektromagnetischen Feldgleichungen, die Schwerefeldgleichungen der Einsteinschen Relativitätstheorie. Die letzte Veröffentlichung Jungs war eine im Almanach der Österreichischen Akademie der Wissenschaften erschienene Würdigung seines Prager Lehrers Ernst Mach.

Jung war seit 1914 mit Martha, geb. Schimmek, der Tochter eines Freundes und Kollegen seines Vaters, verheiratet. Der Ehe entsproß ein Sohn Franz, der sich dem Studium der Physik zuwandte, aber 1944 ein Opfer des zweiten Weltkrieges geworden ist. Von diesem harten Schlag konnte sich Jung, früher eine heitere gesellige



Natur, nie mehr erholen. Das schwer getroffene Ehepaar führte seither ein stilles, zurückgezogenes Leben. Jungs Güte und Bescheidenheit haben ihm viel Freunde erworben. Seine stete Hilfsbereitschaft wurde von allen, die ihn kannten, immer hochgeschätzt.

Im Studienjahr 1930/31 war Jung Rektor der Technischen Hochschule in Wien, die ihm 1947 anlässlich der Vollendung seines 75. Lebensjahres und der Beendigung seiner Lehrtätigkeit das Doktorat der technischen Wissenschaften ehrenhalber verlieh.

Das Österreichische Ingenieur-Archiv betrauert in Franz Jung einen seiner Herausgeber, der ihm seit der in schweren Zeiten 1946 erfolgten Gründung angehörte.

A. Basch, Wien

## Buchbesprechungen

**Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik.** Von K.-R. Dorfner. (Ergebnisse der angewandten Mathematik: Heft 3.) Mit 44 Textabb., VII, 150 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 26.—.

Auf dem Gebiet der theoretischen Gasdynamik haben die Mathematiker schon viele ausgezeichnete Arbeiten geliefert. Aus dem Mathematischen Institut des Professors Sauer ist nun vorliegendes Werk, das sich mit schwierigen dreidimensionalen Überschallproblemen beschäftigt, hervorgegangen. Hinweisend auf die Notwendigkeit, Vernachlässigungen durchzuführen, um zu Näherungslösungen für allgemeine räumliche Überschallprobleme zu gelangen, bespricht der Verfasser die Linearisierung der Potentialgleichung und in Anlehnung an Arbeiten von L. Schwartz ein Rechenverfahren, das sich für das Rechnen mit gewissen unstetigen Funktionen als nützlich erweist. Es handelt sich um das Rechnen mit U-Funktionen, „uneigentlichen Funktionen“, das auch in die theoretische Gasdynamik Eingang gefunden hat. Ganz allgemein werden im 2. Kapitel das „Dickenproblem“ und das „Auftriebsproblem“ eines Tragflügels behandelt. Im folgenden Kapitel werden vom Verfasser Störungsfelder mit konischer Symmetrie besprochen und zum Schluß ein Kapitel über homogene Störung als naheliegende Verallgemeinerung hinzugefügt.

Das Werk bietet sehr viel, erfordert aber der schwierigen Materie wegen ein eingehendes Studium.

R. Bruniak, Wien

**Statik und Dynamik der Schalen.** Von W. Flüge. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 121 Textabb., VIII, 286 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 28.50.

Man freut sich, mit der vorliegenden Neuauflage eines der grundlegenden Werke der elastizitätstheoretischen Literatur einen lange gehegten Wunsch erfüllt zu sehen. Es ist dem Verfasser gelungen, durch Beschränkung auf das Grundsätzliche den Umfang des Buches in den alten Grenzen zu halten — ein sehr schwieriges Unternehmen im Hinblick auf die starke Entwicklung, die das behandelte Gebiet seit dem Erscheinen der ersten Auflage genommen hat.

Die Darstellung ist außerordentlich klar und anschaulich. Es sei hier im besonderen die schöne Diskussion des eigentümlichen Verhaltens der hyperbolischen Paraboloidschalen hervorgehoben, bei denen die Membrantheorie auf Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus führt. Ebenso muß auf die sorgfältige Darstellung der Stabilitätsprobleme hingewiesen werden. Überall tritt deutlich das Bestreben hervor, den mathematischen Formalismus zugunsten einer anschaulichen Deutung zurückzudrängen.

Gegenüber der ersten, 1934 erschienenen Auflage ist der Abschnitt über Membrantheorie, der etwa die Hälfte des Buches einnimmt, etwas erweitert. An Stelle der Membrantheorie der Translationsschalen ist eine Theorie für beliebige Schalenformen getreten. In der Biegetheorie wurde die Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke neu aufgenommen. Auch der Abschnitt über Stabilität wurde erweitert. Die Kapitel über Faltwerke und über Schwingungen sind im wesentlichen unverändert geblieben.

Das Buch gehört auf den Tisch jedes Statikers.

H. Parkus, Wien

**Theorie schallnaher Strömungen.** Von K.G. Guderley. Mit 125 Textabb., XV, 376 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 42.—.

Die Theorie der Strömungen mit Mach-Zahlen nahe an eins gehört zu den schwierigsten Gebieten der Gasdynamik. Der Grund hierfür ist in dem physikalisch und mathematisch grundverschiedenen Verhalten der Unterschall- bzw. Überschallströmung zu suchen. Während die Differentialgleichungen der reinen Unterschallströmung vom elliptischen und die der reinen



Überschallströmung vom hyperbolischen Typus sind, erscheinen bei schallnaher Strömung im Strömungsfeld sowohl Über- als auch Unterschallgebiete und somit beide Gleichungstypen nebeneinander. Die Möglichkeit der Linearisierung besteht im allgemeinen nicht mehr.

Die Entwicklung ist hier noch überall im Fluß und viele Forschungsergebnisse (insbesondere auch die des Verfassers des vorliegenden Buches) sind in schwer zugänglichen und zum Teil überhaupt geheim gehaltenen Spezialberichten niedergelegt. Man muß deshalb dem Verfasser, einem der führenden Fachleute seines Gebietes, für die hier gegebene systematische Darstellung besonders dankbar sein. Sie gestattet es nicht nur dem nicht unmittelbar an der Entwicklung Beteiligten, sich einen Überblick über den Stand der Forschung zu verschaffen, sondern bietet vor allem demjenigen, der sich diesem Gebiet aktiv zuwenden will, eine sichere Ausgangsbasis.

Zum Studium des Buches, das sich auf die reibungsfreie Strömung ohne Wärmeleitung beschränkt, ist, soweit es sich um die aerodynamische Seite handelt, die Kenntnis der wichtigsten Tatsachen und Methoden der Gasdynamik etwa in dem Umfang, wie sie an den Technischen Hochschulen vorgetragen werden, durchaus ausreichend. Überdies stellt der Verfasser die Grundlagen noch in einem sehr schön geschriebenen einleitenden Kapitel zusammen. Die mathematischen Anforderungen an den Leser sind allerdings nicht gering und erfordern neben einer guten Ausbildung intensives Mitdenken. Das Buch wird sowohl den Aerodynamiker wie den Mathematiker ansprechen. Der Verfasser ist angewandter Mathematiker. Er vermeidet es aber durchaus, in das rein Formale abzugleiten, eine Gefahr, die besonders bei der Behandlung schallnaher Strömungen nicht gering ist.

Der Inhalt sei noch kurz angedeutet. Nach einer sehr sorgfältigen Diskussion der Vernachlässigungen bei der Vereinfachung der Strömungsgleichungen und einem Abschnitt über die linearisierte Gleichung werden zwei exakte Lösungen der vereinfachten schallnahen Potentialgleichung gegeben. Dann folgt die Behandlung der ebenen Strömung mittels der Hodographenmethode, der ja gerade für schallnahe Strömungen besondere Bedeutung zukommt. Hierbei wird im wesentlichen nicht die exakte Hodographengleichung, sondern die der schallnahen Potentialgleichung entsprechende, nach Tricomi benannte Gleichung verwendet. Dieser Teil des Buches, der etwa zwei Drittel des Gesamtumfanges einnimmt, ist besonders fesselnd und bietet eine Fülle interessanter Ergebnisse. Er ist allerdings keineswegs leicht zu lesen. Den Abschluß bildet ein kurzes Kapitel über achsensymmetrische Strömungen. *H. Parkus, Wien*

**Spannbetonbau. II. Teil.** Von *W. Herberg*. Mit 240 Textabb., 65 Tafeln im Text und 21 Tafeln im Anhang, VIII, 407 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1957. Geb. DM 26.—.

Der vorliegende 2. Band bildet eine notwendige und gerne entgegengenommene Ergänzung des 1. Bandes, der 1956 erschienen, den Spannbetonbau theoretisch behandelte und alle im Spannbetonkörper zu erfassenden Spannungszustände mathematisch darstellte, wobei auch auf die Baustoffeigenschaften gebührend Rücksicht zu nehmen war.

Wie und auf welchen verschiedenen Wegen die rechnerischen Voraussetzungen im Spannbetonbaukörper tatsächlich erfüllt werden können, ist in diesem 2. Band in Wort und Bild ausführlich dargestellt. Es ist ein Vorzug dieses Buches, in die große Zahl der verschiedenen, patentierten Bauverfahren eine übersichtliche Systematik gebracht zu haben. Dies gilt gleichermaßen für die Gestaltung der Spannglieder und deren Verankerung, der zum Anspannen eingesetzten Geräte und Bauverfahren, der dem Kraftfluß angepaßten Führung der Spannstäbe usw.

Der Spannbetonbau verwendet die Bauformen des Stahlbetonbaues; er ist aber in seinen Querschnittsabmessungen und damit im Eigengewicht der Konstruktion bedeutend sparsamer und gibt die Möglichkeit, kühnere Bauwerke zu schaffen. Bisher vom Stahlbeton nicht erreichte Spannweiten von Balken, Bogen, Platten und Schalen sind ihm möglich. Die Kühnheit der Bauten, ausgedrückt in ihrer großen Schlankheit, findet ihre Grenze nur in der Empfindlichkeit für Schwingungen. Und gerade dieses rissefreie Ausschwingen liegt im Wesen des Spannbetons. Wenn der Verfasser die Absicht hatte, alle diese Fragen in Konstruktion und Bauausführung ausführlich zu beleuchten, dann darf wohl behauptet werden, daß dies völlig gelungen ist.

Seine tabellarischen Zusammenstellungen ausgeführter Straßen- und Eisenbahnbrücken zeigen nicht nur die verschiedensten Gestaltungsmöglichkeiten auf, sondern geben auch die wichtigsten Abmessungen an, mit einem Literaturhinweis, der den Leser zu einer ausführlicheren Beschreibung des Bauwerkes führt. Rund 40 Brückenbauwerke beschreibt der Verfasser in ihren Einzelheiten; übersichtliche Planzeichnungen und gelegentlich auch Zeichnungen über Details sowie Lichtbilder unterstützen das Verständnis.

Die vielfache Verwendung des Spannbetons im Hoch- und Tiefbau behandelt das nächste Kapitel. Decken- und Dachkonstruktionen, Balken- und Rahmentragwerke, Wasserbehälter, Schornsteine, Leitungsmaste, Druckrohre usw. werden beschrieben und übersichtliche Werkzeichnungen und Bilder beigebracht.

Ein ausführlich gehaltenes Schrifttumverzeichnis weist dem Leser weitere Wege. Das Stichwörterverzeichnis soll die Benützung des Buches als Nachschlagwerk erleichtern. Dem Lernenden ein ausgezeichnetes Unterrichtsbuch, dem Suchenden ein Nachschlagwerk, ist dieser zweite Teil von Herbergs Spannbeton ein wertvoller Zuwachs der Spannbetonliteratur.

*F. Pongratz, Wien*

**Technische Schwingungslehre in ihren Grundzügen.** Von *E. Hübner*. Mit 208 Textabb., XI, 322 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 29.40.

Der Verfasser setzt sich zum Ziel, ein Lehrbuch zu schreiben, das die Lücke zwischen den schwer zu erarbeitenden Werken von hohem wissenschaftlichem Niveau und den zu wenig in die Tiefe dringenden elementaren Büchern über Schwingungslehre auszufüllen vermag. Bei einem solchen Unternehmen erscheint es geboten, die Grundlagen besonders klar und eindringlich herauszuarbeiten.

Leider wird der Verfasser gerade dieser Forderung nicht gerecht. Es erscheint zunächst zumindest didaktisch anfechtbar, wenn an die Spitze der dynamischen Betrachtung der „Gleichgewichtssatz der Punktmechanik“ gestellt wird, anstatt von der dynamischen Grundgleichung auszugehen. Wenn aber darüber hinaus die D'Alembertsche Trägheitskraft als Reaktion der Massenkraft („jene Kraft, die zum Beschleunigen der Masse aufzuwenden ist“) angesehen wird, so ist dies völlig dazu angetan, die klaren Grundlagen der Newtonschen Mechanik zu verwirren. Eine derartige, offensichtlich von der elektrischen Analogie angeregte Auffassung zeigt, daß solche Analogien, wenn sie zu weit getrieben werden, den Grundlagen der Mechanik Gewalt antun.

Abgesehen von dieser Schwäche in den Grundlagen, die heute leider ein sehr verbreitetes Übel darstellt, bringt das Werk eine Fülle von Material und eine große Anzahl zweckmäßiger Methoden, die dem Schwingungstechniker willkommen sein werden. Die vielen, vollständig durchgerechneten Beispiele bringen eine reiche Illustration des Lehrstoffes und erleichtern das Studium für den Anfänger. Bei der Behandlung des Fadenpendels auf S. 76 wurde allerdings übersehen, daß es sich hier um ein System mit zwei Freiheitsgraden handelt, so daß die angegebene Schwingungsdauer unrichtig ist.

Der größte Teil des Werkes ist der Behandlung linearer Systeme gewidmet. Am Ende finden sich je ein Abschnitt über Messung von Schwingungen und über nichtlineare Schwingungen. Dabei beschränkt sich der Verfasser auf Systeme mit einem Freiheitsgrad. Bei der Abfassung des Werkes, das keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, wurde darauf Wert gelegt, auch die neueste schwingungstechnische Literatur einzuarbeiten.

*G. Heinrich, Wien*

**Thermodynamics of Heat-Power Systems.** Von *F. W. Hutchinson*. Mit zahlreichen Textabb., XIX, 490 S. Reading, Mass., USA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1957. Geb. \$ 8.50.

Die vorliegende Thermodynamik, dessen Verfasser eine zwanzigjährige Erfahrung als Lehrer besitzt, soll den Studenten in folgenden sieben Abschnitten: Source, Storage, Liberation, Transition, Transformation, Transportation, Utilization, von den Quellen der Wärme bis zu den Vorrichtungen (Maschinen) führen, in denen thermodynamische Änderungen erfolgen. Der Verfasser ist der Meinung, daß eine ausführliche Darstellung der qualitativen Seite sehr nützlich sein kann und will in seinem Werk einen Kern der Grundbegriffe und Prinzipie bringen. Wenn er somit die quantitative Seite im großen anderen Lehrbüchern überläßt, so finden wir doch auch in seinem Buch eine große Anzahl von Beispielen mit Lösungen, die sehr geeignet sind, das in den Kapiteln ausführlich Besprochene exakt anzuwenden. Um auf die Vielseitigkeit des Werkes hinzuweisen, sei erwähnt, daß der Leser z. B. im zweiten Teil (Energy in Storage) unter anderem in die Grundgedanken der Atomenergie und ihrer Gewinnung eingeführt wird.

Die Ansicht des Verfassers, daß eine weitläufige Darstellung für den Studierenden von Nutzen sein kann, ist zu begrüßen, wenn sie so ausfällt, wie in diesem Werk, das viele Vorzüge besitzt, darunter auch die, geschickte Hinweise auf entsprechende Literatur und Probleme zu geben. Studenten und Interessenten kann dieses Werk wärmstens empfohlen werden.

*R. Bruniak, Wien*

**Einführung in die Physik der magnetischen Werkstoffe.** Von *K. M. Koch*. Unter Mitarbeit von *W. Jellinghaus*. (Einführung in die Physik der elektrotechnischen Werkstoffe: III. Teil.) Mit 176 Abb. i. T. und 7 Tab. i. Anhang, VII, 208 S. Wien: F. Deuticke. 1957. Geb. S 186.—.

Die Werkstoffe der Technik, darunter insbesondere die magnetischen Werkstoffe, zeigen heute eine geradezu stürmische Entwicklung, der in Theorie und Praxis an Hand der zerstreuten Literatur zu folgen nicht leicht ist. Die Herausgabe einer mehrbändigen „Einführung in die Physik elektrotechnischer Werkstoffe“, von denen der vorliegende Band nur einen Teil darstellt, bedeutet daher eine begrüßenswerte Aufgabe.



Die Anwendung der magnetischen Werkstoffe erfordert ein entsprechendes Ausmaß an Theorie. Innerhalb eines gewissen Bereiches genügt die Kontinuumstheorie, die jedoch nur oberflächliche Angaben gestattet; das Eintreten in die Atomphysik und soweit diese nicht ausreicht, in ad hoc-Theorien, wird notwendig, sobald das wirkliche Verhalten der ungezählten magnetischen Werkstoffe erfaßt werden soll. Demgemäß beschäftigt sich das erste Kapitel des vorliegenden Bandes mit der Entwicklung der Grundbegriffe, das zweite mit den atomistischen Theorien des Magnetismus; sodann werden in den weiteren Kapiteln die Elementarprozesse der Magnetisierung, Probleme der realen Magnetisierungskurve, ferromagnetische Werkstoffe im magnetischen Wechselfeld, die magnetischen Werkstoffe in der Elektrotechnik und die Messung magnetischer Größen behandelt. Vier Anhänge mit Zahlentafeln und Daten, Literaturangaben, Register und Firmenhinweise beschließen den Band.

Die Ausführungen sind didaktisch gehalten und sichtlich dem „Dienst am Leser“ gewidmet. Es ist nun allerdings eine schwierige Aufgabe, dem Leser gleichsam im Fluge die nötigen kontinuumstheoretischen und atomphysikalischen Unterlagen zu vermitteln und es liegt die Frage nahe, ob nicht zumindest die ersteren, die kontinuumstheoretischen, vorzusetzen wären. Auf Seite 15 wird angegeben, daß die Einführung des Vektors  $\mathfrak{B}$  „erfahrungsgemäß“ für verschiedene Probleme von Vorteil ist. Angesichts der Geschlossenheit der Maxwell'schen Theorie, in der dieser Vektor eine fundamentale Rolle spielt, scheinen derartige Auslassungen überflüssig. Dafür könnte etwa kurz und klar der Sachverhalt, daß der Flächeninhalt der Hysteresisschleife den entsprechenden Verlust angibt, aus dem Poyntingschen Vektor abgeleitet werden.

Sobald man in die Konstitution und das Verhalten der speziellen magnetischen Materialien eintritt, gibt es eine Fülle von Einzel Tatsachen und zugehörigen Hypothesen oder Theorien, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Das Kapitel „Die magnetischen Werkstoffe der Elektrotechnik“ ist verhältnismäßig kurz; doch wird im Vorwort ein eigener, den magnetischen Werkstoffen gewidmeter Band in Aussicht gestellt.

Der vorliegende Band stellt eine didaktisch betonte, handliche Zusammenstellung der nötigen Unterlagen dar, die bei der Verwendung magnetischer Materialien benötigt werden und kann jedem an diesem Gegenstand Interessierten empfohlen werden. L. Kneissler, Wien

**The Analysis of Engineering Structures.** Von A. J. S. Pippard und J. F. Baker. Dritte Auflage. Mit zahlreichen Textabb., XII, 564 S. London: E. Arnold (Publishers) Ltd. 1957. 60 s.

Das Werk behandelt die Grundlagen der Baumechanik für Studierende des Bauingenieurwesens an englischen Universitäten. In ihm ist die Festigkeitslehre mit der Baustatik vereinigt, wobei der Stoff wie folgt gegliedert wurde: Spannungen in geraden und gekrümmten Balken, die allgemeinen, auf elastische Gebilde bezüglichen Theoreme, Formänderungen elastischer Gebilde (Balken und Fachwerke). Spannungen in statisch unbestimmten Fachwerken, Knickung, Durchlaufträger, Rahmen, Momentenverteilungsverfahren (Crosssche Methode), Abriß der Theorie des Stahlbetons, Theorie der Bogenträger, Ringe und Hängebrücken, Einflußlinien statisch bestimmter und statisch unbestimmter Systeme, Gewölbe (Näherungsberechnung), gekrümmte Träger, die senkrecht zu ihrer Ebene belastet sind, Stahlskelettbauten, Theorie der Talsperren, Bodenpressung und Erddruck, Experimentelle Methoden zur Spannungsbestimmung und Plastizitätstheorie.

Diese Zusammenfassung einerseits und die Auswahl des Stoffes andererseits, die mehr darauf abgestellt ist, von allem etwas zu bringen, entspricht den Ausbildungsverhältnissen in England, wo viele nur die Unterstufe des Hochschulstudiums durchmachen, dabei aber eine abgerundete fachliche Bildung erhalten sollen.

Unter diesem Gesichtswinkel betrachtet, erfüllt das Werk, aus welchem die einfache Darstellungsweise besonders hervorzuheben ist, seinen Zweck. E. Czitary, Wien

**Atomphysik.** Grundlagen und Anwendungsbeispiele für Metallkundler und Ingenieure. Von F. Regler. (Aluminium Ranshofen Mitteilungen: Sonderheft 4.) Mit 39 Textabb., 7 Tab., 43 S. Salzburg-Großgmain: Technische und Fachverlagshandlung F. Wessiak. 1956. S 42.—.

Der Autor vermittelt in vorliegendem Werk mit viel pädagogischem Geschick in möglichst allgemein verständlicher Form die theoretischen Grundlagen der Atomphysik und die Technik der Kernspaltung einschließlich ihrer vielseitigen Anwendung.

Im einzelnen werden nach einem kurzen Rückblick auf die Entwicklung der Atomistik die Elemente der Atomhülle mit ihrer Beziehung zu den Wellenlängen des elektromagnetischen Spektrums und zum periodischen System behandelt. Anschließend werden der Spaltungsmechanismus des Atomkernes, das Prinzip der Teilchenbeschleuniger (Zyklotron und Betatron) und die künstliche Atomumwandlung beschrieben. In einem besonderen Kapitel wird dann auf die



Kernspaltung und die Grundtypen der Atomreaktionen und deren Wirkungsweise eingegangen. Der letzte Abschnitt befaßt sich mit der friedlichen Anwendung der Atomenergie, die insbesondere dem Metallkundler und Ingenieur neue Prüf- und Forschungsbehelfe bietet, wie etwa die Klärung der Diffusion fester Körper ineinander, die Markierung von Atomen der Zusatzelemente, die Verbindung der Metalle bei Kalt- und Warmbearbeitungsprozessen, die Strukturanalyse durch Neutronenstrahlenbeugung, die Beeinflussung der technologischen Eigenschaften durch Beschießen mit Neutronen, die Messung der Wirkungsquerschnitte der Metalle für Neutronen verschiedener Geschwindigkeiten, die Verwendung von Radioisotopen u. a. m. Damit vermittelt dieses Werk ein abgerundetes Bild vom heutigen Stand der Atomphysik und -technik und verleiht dem Leser außerdem die grundlegenden Kenntnisse für die eingehendere Beschäftigung mit diesem Wissensgebiet.

*C. Kämmerer, Wien*

**Raum und Zahl.** Von *K. Reidemeister*. Mit 31 Textabb., VII, 151 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 19.80.

Das vorliegende Werk eines sehr kritischen Denkers besteht aus zehn weitgehend unabhängig voneinander lesbaren Essays, und zwar der Reihe nach betreffend den Ursprung des geometrischen Denkens, eine Anzahl von Kegelschnitts- und Winkelteilungsmechanismen (aus dem Nachlaß von C. Otter, 1598—1660), die Grundlagen der analytischen Geometrie, den Unterschied der „Gegenden“ im Raum (Orientierungsfragen), Anschauung und Begriff (erörtert an Hand der transfiniten Ordnungszahlen und der Elemente der kombinatorischen Topologie), Geometrie und Logik, eine bemerkenswerte neue Begründung der Infinitesimalrechnung, eine Note über Gauß, Geometrie und Zahlentheorie (Konstruierbarkeitsprobleme) und schließlich „Prolegomena einer kritischen Philosophie“. Der Verfasser will mit seinen Darlegungen das Wesen mathematischen Denkens und insbesondere die Rolle der Anschauung dabei beleuchten. Wer Sinn für erkenntnistheoretische Fragen und die Grundlagen der Mathematik hat, wird das Buch mit Interesse zur Hand nehmen.

*W. Wunderlich, Wien*

**Zusammenstellung eines Meßwagens für Bau- und Raumakustik.** Von *K.-F. Rittinghaus*. (Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen: Nr. 213.) Mit 17 Textabb., 87 S. Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag. 1957. DM 19.80.

Die fortschreitende Industrialisierung und Motorisierung auf der einen und Leichtbauweise auf der anderen Seite machen das Aufsuchen und die Bekämpfung von störenden Geräuschen bzw. Lärmen zu einer dringend notwendigen Aufgabe. Der Autor unternimmt nun den Versuch, die Zusammenstellung eines Meßwagens für die Bau- und Raumakustik zu beschreiben.

Einleitend werden in diesem Heft allgemeine Erörterungen über Größen und Grundbegriffe der Akustik angestellt. Dabei wäre zu bemerken, daß sämtliche Begriffe auf DIN-Blätter bezogen sind. Die eigentlichen bau- und raumakustischen Messungen basieren meist auf den Möglichkeiten der Elektroakustik. Detailliert werden nun die Messungen von Lautstärke, Nachhallzeit, Luft und Trittschalldämmung (besonders für Wohn- und Krankenhäuser) bzw. Körperschall und außerdem die Messung der Diffusion und Deutlichkeit besprochen. Für diese Messungen sind nicht nur die Schaltbilder angegeben, sondern auch die vom Institut für elektrische Nachrichtentechnik der Rhein.-Westf. Techn. Hochschule Aachen entworfenen und verwendeten Vordrucke für die Auswertung der Meßresultate. Die für die eben angegebenen Messungen notwendigen Instrumente sind zu einer Einheit in einem Kraftwagen zusammengebaut, um leicht beweglich überall eingesetzt werden zu können.

Eine ausführliche Literaturangabe schließt diesen Band ab. Die deutliche und klare Darstellungsweise machen dieses Heft sicher zu einem wertvollen Hilfsmittel für jeden mit solchen Problemen Beschäftigten.

*F. Plöckinger, Wien*

## Autorenverzeichnis

- Basch, A., Franz Jung †. S. 327.
- Braunbeck, J., Über Körperfarben im Röntgengebiet. S. 318.
- Bruniak, R., Technische Strömungslehre. Von B. Eck. 5. Aufl. (Buchbesprechung.) S. 162.
- , Untersuchungen über die dreidimensionale Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter. Von Th. Ginsburg. (Buchbesprechung.) S. 162.
- , Über die Ablösung der Grenzschicht beim Verdichtungsstoß. S. 243.
- , Die Messung von Flammen- und Detonationsgeschwindigkeiten bei der explosiven Zersetzung von Azetylen in Rohren. Von P. Hölemann, R. Hasselmann und Grete Dix. (Buchbesprechung.) S. 248.
- , Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik. Von K. R. Dorfner. (Buchbesprechung.) S. 328.
- , Thermodynamics of Heat-Power Systems. Von F. W. Hutchinson. (Buchbesprechung.) S. 330.
- Bukovics, E., Vorlesungen über höhere Mathematik. Von A. Duschek. I. Band. (Buchbesprechung.) S. 90.
- Chmelka, F., Probleme der Plastizitätstheorie. Von W. Prager. (Buchbesprechung.) S. 163.
- Czitáry, E., The Analysis of Engineering Structures. Von A. J. S. Pippard und J. F. Baker. 3. Auflage. (Buchbesprechung.) S. 331.
- Desoyer, K., Zur rollenden Reibung zwischen Scheiben mit verschiedenen Elastizitätskonstanten. S. 146.
- Eberl, W. und G. Schneeweiß, Die Kontrolle der Druckfestigkeit von Beton durch Stichproben. I. Teil. S. 172.
- Egerváry, E., Über eine Verallgemeinerung der Purcell'schen Methode zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. S. 249.
- Engel, E., Zur Bieungsbeanspruchung eines Seiles auf einer elastisch gefütterten Rolle. S. 238.
- Federhofer, K., Die dünne Kreisringplatte mit großer Ausbiegung. S. 252.
- Fieber, H., s. Selig, F.
- Görtler, H. und H. Witting, Zu den Tani-schen Grenzschichten. S. 111.
- Heinrich, G., Flächentragwerke. Von K. Girkmann. Vierte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 248.
- , Technische Schwingungslehre in ihren Grundzügen. Von E. Hübner. (Buchbesprechung.) S. 330.
- , s. Kirste, L.
- Hofmann, H., Über den Kraftangriff des Magnetfeldes an Elementarströmen. S. 1.
- , Die Behandlung von Sprungflächen beim Kraftangriff des stationären elektromagnetischen Feldes an der Materie. S. 80.
- , Über den Kraftangriff des allgemeinen, nichtstationären elektromagnetischen Feldes an der Materie. S. 123.
- , Über das Drehmoment im elektromagnetischen Feld. S. 285.
- Inzinger, R., Einführung in die höhere Mathematik. Von K. Strubecker. Band I. (Buchbesprechung.) S. 91.
- Jindra, F., Beitrag zur nichtlinearen Torsion. S. 134.
- Jung, H., Über die Bestimmung der Wärmespannungen in ungleichförmig erwärmten Kontaktöfen. S. 257.
- Kämmerer, C., Atomphysik. Von F. Regler. (Buchbesprechung.) S. 331.
- Karas, K., Stationäre Laminarströmung durch Kreis- und Kreisringrohre mit fester bzw. beweglicher Innenwandung und bei statischer Druckverteilung. S. 306.
- Kirste, L. und G. Heinrich, Eine kurze Bemerkung zu dem Aufsatz „Zur Stabilität der Strickleiter“ von G. Heinrich in Heft 2—3 dieser Zeitschrift, S. 175—189. S. 88.



- Kneissler, L., Einführung in die Physik der magnetischen Werkstoffe. Von K. M. Koch und W. Jellinghaus. (Buchbesprechung.) S. 330.
- Knödel, W., Elementary Differential Equations. Von W. T. Martin und M. Reissner. (Buchbesprechung.) S. 91.
- Korst, H. H., Zur theoretischen Bestimmung des Dellendruckes bei abgelöster Strömung. S. 227.
- Kotal, M., Relaxationsmethode. S. 93.
- Lachner, F., Über die richtige Farbenwiedergabe. S. 103.
- Ledinegg, E., Schaltungstheorien im Zentimeter-Wellengebiet. S. 20.
- Magyar, F., Otto Lange — 70 Jahre. S. 161.
- , Engineering Structural Failures. Von R. Hammond. (Buchbesprechung.) S. 162.
- , Particulate Clouds: Dusts, Smokes and Mists. Von H. L. Green und W. R. Lane. (Buchbesprechung.) S. 247.
- Nowotny, H. und A. Maschka, Physikalische Chemie als Einführung in die chemische Technik. Von O. Fuchs. (Buchbesprechung.) S. 247.
- Oravas, G.-Ae., Transverse Bending of Thin Shallow Shells of Translation. S. 264.
- Oswatitsch, K., Zum Aufsatz: Über eine Verallgemeinerung des Potentials auf Strömungen mit Drehung. S. 326.
- Parkus, H., Vibration Analysis Tables. Von R. E. D. Bishop und D. C. Johnson. (Buchbesprechung.) S. 162.
- , Einführung in die Technische Mechanik. Von I. Szabó. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 164.
- , Statik und Dynamik der Schalen. Von W. Flüge. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 328.
- , Theorie schallnaher Strömungen. Von K. G. Guderley. (Buchbesprechung.) S. 328.
- Peschka, W., Über Stabilitätsuntersuchungen mit Hilfe des Verfahrens der „harmonischen Balance“. S. 276.
- Plöckinger, F., Zusammenstellung eines Meßwagens für Bau- und Raumakustik. Von K.-F. Rittinghaus. (Buchbesprechung.) S. 332.
- Pongratz, F., Cálculo de Concreto Armado. Von T. van Langendonck. Band I. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 163.
- , Spannbetonbau. Von W. Herberg. II. Teil. (Buchbesprechung.) S. 329.
- Prachar, K., Zur Theorie der Gleichrichtung. S. 320.
- Rohrer, J., Geodäsie und Photogrammetrie. Von F. Ackert. II. Teil. (Buchbesprechung.) S. 89.
- Rüdiger, D., Die strenge Theorie der Faltwerke konstanter Krümmung. S. 5.
- Schneeweiß, G., s. Eberl, W.
- Schumpich, G., Beitrag zur Kinetik und Statik ebener Stabwerke mit gekrümmten Stäben. S. 194.
- Selig, F. und H. Fieber, Wärmeleitprobleme mit zeitlich variabler Übergangszahl. S. 37.
- , Bemerkung zu: Wärmeleitprobleme mit zeitlich variabler Übergangszahl. S. 225.
- Stix, R., Ströme und Drehmomente des einphasigen Asynchronmotors und des unsymmetrischen zweiphasigen Asynchronmotors. S. 40.
- Tremmel, E., Über die Anwendung der Plattentheorie zur Bestimmung von Wärmespannungsfeldern. S. 165.
- Vockenberger, R., Engineering Inspection Measurement and Testing. Von H. C. Town und R. Colebourne. (Buchbesprechung.) S. 164.
- Witting, H., s. Görtler, H.
- Wunderlich, W., Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Von E. Kruppa. (Buchbesprechung.) S. 248.
- , Raum und Zahl. Von K. Reidemeister. (Buchbesprechung.) S. 332.



*Soeben erschienen:*

**Wasserstrahlpumpen zur Förderung von Flüssigkeiten.** Von Dr. techn. **Ferdinand Schulz**, Professor an der Technischen Hochschule, Wien, und Dr. techn. **Karl Heinz Fasol**, Assistent an der Technischen Hochschule, Wien. Mit 60 Textabbildungen. VI, 75 Seiten. Gr.-8°. 1958. S 90.—, DM 15.—, sfr. 15.40, \$ 3.55

Das Anwendungsgebiet der Strahlapparate in vielen Industriezweigen ist sehr groß. Trotzdem sind in der technischen Literatur, wenn man von einigen ausführlichen Aufsätzen absieht, nur spärliche Angaben zu finden, nach denen es möglich ist, Wasserstrahlpumpen zur Förderung von Flüssigkeiten richtig zu dimensionieren. Diese Lücke in der Literatur zu schließen, ist die Aufgabe dieses Buches, mit dessen Erscheinen einem oft geäußerten Wunsch der Praxis nachgekommen wird.

**Integraltafel.** Herausgegeben von Dr. **Wolfgang Gröbner**, o. Professor an der Universität Innsbruck, und Dr. **Nikolaus Hofreiter**, o. Professor an der Universität Wien.

Erster Teil: **Unbestimmte Integrale.** Zweite, verbesserte Auflage. VIII, 166 Seiten. 4°. 1957. Steif geheftet S 136.—, DM 22.70, sfr. 23.20, \$ 5.40

Zweiter Teil: **Bestimmte Integrale.** Zweite, verbesserte Auflage. VI, 204 Seiten. 4°. 1958. Steif geheftet S 162.—, DM 27.—, sfr. 27.60, \$ 6.45

**Einflußfelder elastischer Platten.** Von Dipl.-Ing. Prof. Dr. techn. **Adolf Pucher**, Graz. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 81 Tafeln und 10 Textabbildungen. VIII, 15 Seiten Text. Quer-4°. 1958. Ganzleinen S 210.—, DM 35.—, sfr. 35.80, \$ 8.35

**Korrosionstabellen metallischer Werkstoffe**, geordnet nach angreifenden Stoffen. Von Dr. techn. **Franz Ritter**, Leoben-Linz. Vierte, erweiterte Auflage. Mit 37 Textabbildungen. IV, 290 Seiten. Gr.-8°. 1958. Ganzleinen S 294.—, DM 49.—, sfr. 50.20, \$ 11.65

**Einführung in die geometrische und physikalische Kristallographie** und in deren Arbeitsmethoden. Von Prof. Dr. **Franz Raaz** und Prof. Dr. **Hermann Tertsch**, beide Wien. Dritte, wesentlich erweiterte Auflage. Mit 384 Textabbildungen. XII, 367 Seiten. Gr.-8°. 1958. Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, \$ 11.45

**Blätter für Technikgeschichte.** Herausgegeben vom Technischen Museum für Industrie und Gewerbe in Wien, Forschungsinstitut für Technikgeschichte. Schriftleitung: Dr. phil. **J. Nagler**, Wien.

Neunzehntes Heft: Mit 68 Abbildungen, 4 Tafeln, 1 Farbbild. VII, 141 Seiten. Beigedrukt: Kulturgeschichte des technischen Zeichnens. Von Ing. **Alois Nedoluha**, Wien. I. Teil: Mit 30 Abbildungen und 1 Tafel. I, 51 Seiten. Gr.-8°. 1957.

S 60.—, DM 10.—, sfr. 10.20, \$ 2.40

**Der kommerzielle Hubschrauberverkehr.** Von Dkfm. Dr. **Herwig Pötzleitner**, Wien. Mit 7 Textabbildungen. 70 Seiten. Kl.-8°. 1958.

Steif geheftet S 60.—, DM 10.—, sfr. 10.20, \$ 2.40

**Das Problem der Straßenkostenrechnung.** Von Dkfm. Dr. **Paul Hassler**. 79 Seiten. Kl.-8°. 1957. Steif geheftet S 60.—, DM 10.—, sfr. 10.20, \$ 2.40

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung



**Technische Elektrodynamik.** Von Dr.-Ing. Dipl.-Ing. Franz Ollendorff, Member I. E. E., Member A. I. E. E., Senior Member I. R. E., Research-Professor der Elektrotechnik an der Hebräischen Technischen Hochschule Haifa, Mitglied des wissenschaftlichen Forschungsrates für Israel.

Band I: **Berechnung magnetischer Felder.** Mit 287 Textabbildungen. X, 432 Seiten. Gr.-8°. 1952. Ganzleinen S 396.—, DM 66.—, sfr. 67.50, \$ 15.70

Band II: **Innere Elektronik.**

Erster Teil: **Elektronik des Einzelelektrons.** Mit 313 Textabbildungen. XII, 643 Seiten. Gr.-8°. 1955. Ganzleinen S 582.—, DM 97.—, sfr. 99.30, \$ 23.10

Zweiter Teil: **Elektronik freier Raumladungen.** Mit 240 Textabbildungen. XII, 620 Seiten. Gr.-8°. 1957. Ganzleinen S 588.—, DM 98.—, sfr. 100.30, \$ 23.35

*In Vorbereitung befinden sich folgende Bände:*

Band II:

Dritter Teil: **Kinetische Elektronentheorie.** Rauschen (Noise) und Quantenmechanik der Elektronik.

Vierter Teil: **Kristallelektronik.**

Band III: **Ionik.**

---

**Die Welt der Vektoren.** Einführung in Theorie und Anwendung der Vektoren, Tensoren und Operatoren. Von Dr.-Ing. Dipl.-Ing. Franz Ollendorff, Professor der Elektrotechnik und Vorstand des Elektrotechnischen Laboratoriums, The Hebrew Technical College, Haifa (Israel). Mit 68 Textabbildungen. VIII, 470 Seiten. Gr.-8°. 1950.

S 228.—, DM 37.50, sfr. 39.—, \$ 9.—

Ganzleinen S 240.—, DM 40.—, sfr. 42.—, \$ 9.50

---

**Vom Ursprung und Ende der Metaphysik.** Eine Studie zur Weltanschauungskritik. Von Ernst Topitsch, Professor an der Universität Wien. IV, 320 Seiten. Gr.-8°. 1958. Ganzleinen S 156.—, DM 26.—, sfr. 26.60, \$ 6.20

„... Angesichts der höchst prekären geistigen Situation der Gegenwart, angesichts der bedenklichen Stagnation des philosophischen Denkens unserer Zeit infolge seiner Aufspaltung in eine gleichermaßen sterile wie vorlaute existentialistische ‚Katastrophenphilosophie‘ und neumittelalterliche ‚Restaurationsphilosophie‘ kann man gar nicht erfreut genug sein über die vorliegende Publikation, deren Grundgedanken schon infolge ihrer unbestreitbaren heuristischen Fruchtbarkeit ohne Zweifel einmal einen ‚Eckstein der philosophischen Erkenntnistheorie‘ bilden werden... Mit diesem Werk ist ein Grundstein gelegt, auf dem in Zukunft mit Aussicht auf größten Gewinn weitergebaut werden kann. Es bleibt nur zu wünschen, daß auch tatsächlich in dieser Richtung weitergedacht werde, daß die so notwendige kritische Selbstbestimmung der Gegenwartsphilosophie mehr und mehr um sich greife!...“

*Neue Wege*

---

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung